Completely Based on the BLUEPRINT & BOARD MODEL PAPER-2024

संजीव®

डेस्क वर्क

(वर्क बुक)

(प्रोजेक्ट कार्य सहित)

FREE

इस डेस्क वर्क के साथ
₹ 20 मूल्य की
प्रोजेक्ट कार्य पुस्तिका फ्री

बोर्ड मॉडल पेपर-2024 हल सहित

गणित

कक्षा
12

संजीव प्रकाशन, जयपुर

प्रश्न-पत्र की योजना
कक्षा — 12
विषय — गणित

अवधि — 3 घण्टे 15 मिनट पूर्णांक — 80

1. उद्देश्य हेतु अंकभार—

क्र. सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	24	30
2.	अवबोध	20	25
3.	ज्ञानोपयोग/अभिव्यक्ति	24	30
4.	कौशल/मौलिकता	12	15
	योग	**80**	**100**

2. प्रश्नों के प्रकारवार अंकभार—

क्र. सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रति प्रश्न	कुल अंक	प्रतिशत (अंकों का)	प्रतिशत (प्रश्नों का)	संभावित समय
1.	वस्तुनिष्ठ	15	1	15	18.75	29.41	30
2.	रिक्त स्थान	7	1	7	08.75	13.73	15
3.	अतिलघूत्तरात्मक	10	1	10	12.50	19.61	35
4.	लघूत्तरात्मक	12	2	24	30.00	23.53	45
5.	दीर्घउत्तरीय	4	3	12	15.00	7.84	35
6.	निबंधात्मक	3	4	12	15.00	5.88	35
	योग	**51**		**80**	**100**	**100**	**195 मिनट**

विकल्प योजना : खण्ड 'स' एवं 'द' में हैं।

3. विषयवस्तु का अंकभार—

क्र. सं.	विषयवस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1.	सम्बन्ध एवं फलन	3	03.75
2.	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	4	05.00
3.	आव्यूह	5	06.25
4.	सारणिक	5	06.25
5.	सांतत्यता तथा अवकलनीयता	8	10.00
6.	अवकलजों के अनुप्रयोग	6	07.50
7.	समाकलन	12	15.00
8.	समाकलनों के अनुप्रयोग	4	05.00
9.	अवकल समीकरण	6	07.50
10.	सदिश बीजगणित	7	08.75
11.	त्रिविमीय ज्यामिति	9	11.25
12.	रैखिक प्रोग्रामन	4	05.00
13.	प्रायिकता	7	08.75
	योग	80	100.00

कक्षा-12

ब्ल्यू प्रिन्ट

विषय : गणित

पूर्णांक : 80

क्र. सं.	उद्देश्य इकाई/उप इकाई	ज्ञान						अवबोध						ज्ञानोपयोग/अभिव्यक्ति						कौशल/मौलिकता						योग
		वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घ उत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घ उत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घ उत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घ उत्तरात्मक	निबन्धात्मक	
1.	सम्बन्ध एवं फलन	1(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	3(2)
2.	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	1(1)	-	-	-	-	-	-	1(1)	-	-	-	-	-	1(2)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4(4)
3.	आव्यूह	1(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	2(1)	-	-	-	-	-	2(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	5(3)
4.	सारणिक	1(1)	-	-	-	-	-	-	-	1(2)	-	-	-	-	-	-	2(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	5(4)
5.	सांतत्यता एवं अवकलनीयता	1(1)	1(1)	-	2(1)	-	-	-	-	-	2(2)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8(5)
6.	अवकलजों के अनुप्रयोग	1(1)	1(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1(2)	-	-	-	-	-	-	2(1)	-	-	6(5)
7.	समाकलन	1(1)	-	-	2(1)	-	-	-	-	1(2)	-	-	4*(1)	-	-	-	-	3*(1)	-	-	-	-	-	-	-	12(6)
8.	समाकलनों के अनुप्रयोग	1(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1(1)	-	-	2(1)	-	-	4(3)
9.	अवकल समीकरण	1(1)	1(1)	-	-	-	-	-	-	1(1)	-	-	-	-	-	-	-	3*(1)	-	-	-	-	-	-	-	6(4)
10.	सदिश बीजगणित	1(1)	1(1)	-	2(1)	-	-	-	-	1(1)	-	-	-	-	-	1(2)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7(6)
11.	त्रिविमीय ज्यामिति	1(2)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4*(1)	-	-	-	-	3*(1)	-	9(4)
12.	रैखिक प्रोग्रामन	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4*(1)	4(1)
13.	प्रायिकता	1(2)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3*(1)	-	-	-	-	2(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	7(4)
		14(14)	4(4)	-	6(3)	-	-	-	1(1)	6(6)	6(3)	3(1)	4(1)	-	2(2)	4(4)	8(4)	6(3)	4(1)	1(1)	-	-	4(2)	3(1)	4(1)	80(51)

विकल्पों की योजना—खण्ड 'स' एवं 'द' में प्रत्येक में एक आंतरिक विकल्प है। नोट—कोष्ठक के बाहर की संख्या 'अंकों' की तथा अंदर की संख्या 'प्रश्नों' के द्योतक है।

विद्यार्थियों एवं गुरुजनों को नवीन पेपर पैटर्न की जानकारी देने हेतु बोर्ड द्वारा मॉडल प्रश्न-पत्र जारी किये गये हैं। विद्यार्थियों की सुविधा हेतु इस मॉडल प्रश्न-पत्र को मॉडल पेपर-1 में हल सहित दिया जा रहा है तथा शेष अभ्यासार्थ मॉडल पेपर पूर्णतः बोर्ड द्वारा जारी मॉडल प्रश्न-पत्र पर आधारित हैं।

बोर्ड द्वारा जारी मॉडल प्रश्न-पत्र (हल सहित)

मॉडल पेपर-1

उच्च माध्यमिक परीक्षा, कक्षा 12

गणित

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक-साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
6. प्रश्न क्रमांक 16 से 22 में आन्तरिक विकल्प है।

खण्ड-अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न—

(i) मान लीजिए कि $f: R \to R$, $f(x) = (x)^3$ द्वारा परिभाषित है तो सही विकल्प का चयन कीजिए। 1

(अ) f एकैकी आच्छादक है (ब) f बहुएकी आच्छादक है

(स) f एकैकी है पर आच्छादक नहीं है (द) f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है

(ii) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान है— 1

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{1}{4}$ (द) 1

(iii) मान लीजिए कि X, Y, Z, W तथा P क्रमशः $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ तथा $p \times k$ कोटियों के आव्यूह हैं। 1

यदि $n = p$ तो आव्यूह $7X - 5Z$ की कोटि है—

(अ) $p \times 2$ (ब) $2 \times n$ (स) $n \times 3$ (द) $p \times n$

(iv) यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तो x बराबर है— 1

(अ) 6 (ब) ± 6 (स) -6 (द) 0

(v) फलन $\cos(\sin x)$ का अवकलज है— 1

(अ) $\sin(\sin x)$ (ब) $\sin(\cos x)$ (स) $-\sin(\sin x)$ (द) $-\cos x \sin(\sin x)$

(vi) एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ cm, पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है— 1

(अ) 10π (ब) 12π (स) 11π (द) 8π

(vii) $\int \log x\, dx$ का मान है— 1

(अ) $\log x - x + c$ (ब) $1 + \log x + c$ (स) $x(\log x - 1) + c$ (द) $x(\log x + 1) + c$

(viii) अवकल समीकरण $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ की घात है— 1

(अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 4

(ix) मान लीजिए कि दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ तब $\vec{a} \times \vec{b}$ एक मात्रक सदिश यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य कोण है— 1

(अ) $\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{2}$ (स) $\frac{\pi}{4}$ (द) $\frac{\pi}{3}$

(x) रेखा $\frac{x+1}{2} = \frac{2y-2}{4} = \frac{3-z}{3} = \lambda$ के दिकअनुपात हैं— 1

(अ) 2, 4, 3 (ब) 2, 2, 3 (स) 2, 4, –3 (द) 2, 2, –3

(xi) रेखाओं $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+3}{4}$ और $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$ के मध्य कोण है— 1

(अ) 45° (ब) 30° (स) 60° (द) 90°

(xii) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ का क्षेत्रफल है— 1

(अ) 2π (ब) 16π (स) 4π (द) $\frac{\pi}{4}$

(xiii) वक्र $y^2 = 4x, y$ अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है— 1

(अ) 2 (ब) $\frac{9}{4}$ (स) $\frac{9}{3}$ (द) $\frac{9}{2}$

(xiv) यदि P(A/B) > P(A) तो निम्न में से सत्य है— 1

(अ) P(B/A) < P(B) (ब) P(A∩B) < P(A).P(B)

(स) P(B/A) > P(B) (द) P(B/A) = P(B)

(xv) यदि $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = 0$ तो P(A/B) है— 1

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{2}$ (स) परिभाषित नहीं (द) 1

हल—

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)	(xiii)	(xiv)	(xv)
(अ)	(द)	(ब)	(ब)	(द)	(ब)	(स)	(ब)	(स)	(द)	(द)	(स)	(ब)	(स)	(स)

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

(i) $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान .... है। 1

(ii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान .... है। 1

(iii) $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{3}{4}$ का मान .... होगा। 1

(iv) यदि $y=\log_a x$ तो $\frac{dy}{dx}$ = ... 1

(v) यदि $f(x)=-|x+1|+3$ तो $f(x)$ का अधिकतम मान .... है। 1

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\sec x=\tan x$ का समाकल गुणांक है— 1

(vii) सदिश $\hat{i}+\hat{j}$ का सदिश $\hat{i}-\hat{j}$ पर प्रक्षेप .... है। 1

हल— (i) $-\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{41}{38}\right)$ (iv) $\frac{1}{x\log_e a}$

(v) 3 (vi) $\sec x + \tan x$ (vii) $\sqrt{2}$

3. अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न—

(i) सारणिक $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix}$

$= (x^2-x+1)(x-1)-(x+1)(x-1)$

$= (x-1)[x^2-x+1-x-1]$

$= (x-1)[x^2-2x]=x(x-1)(x-2)$ उत्तर

(ii) x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ 1

हल— $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$

बायाँ पक्ष = $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 20 = -18$

दायाँ पक्ष = $\begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix} = (2x^2-24)$

अत: $-18 = 2x^2-24$ या $2x^2=24-18=6$

$\therefore$ $x^2 = 3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ उत्तर

(iii) अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = \cos x$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान है जहाँ $0\le x\le 2\pi$। 1

हल— $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$\because$ $x\in(\pi,2\pi)$ के लिए $\sin x<0$

$\therefore$ $-\sin x>0$

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$

इसलिए $f(x)=\cos x$, अन्तराल $(\pi,2\pi)$ में वर्धमान है।

(iv) किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय R(x) रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। सीमान्त आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है। 1

हल— राजस्व का समीकरण

$$R(x) = 13x^2+26x+15$$

$$\text{सीमान्त आय} = MR=\frac{d}{dx}R(x)$$

$$=\frac{d}{dx}(13x^2+26x+15)=26x+26$$

$$= 26(x+1)$$

$\therefore$ $MR = 26(x+1)$

दिया है, $x = 7$

$MR = 26 \times 8 = 208$ रु. उत्तर

(v) $\int\frac{1}{x+x\log x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— $$\int\frac{1}{x+x\log x}dx = \int\frac{1}{x(1+\log x)}dx$$

यहाँ $1+\log x=t$ रखने पर, $\frac{1}{x}dx=dt$

अतः $\int\frac{1}{x+x\log x}dx = \int\frac{1}{t}dt=\log|t|+c$, t का मान रखने पर

$= \log|1+\log x|+c$ उत्तर

(vi) $\int e^x(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2})dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— $$I =\int e^x(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2})dx$$

अब $f(x) = \tan^{-1}x$, तब $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

अतः दिया हुआ समाकलन $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ के रूप का है।

इसलिए, $I=\int e^x(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2})dx=e^x\tan^{-1}x+c$

(vii) चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या ज्ञात कीजिए। 1

हल— चार कोटि वाले अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या 4 होगी।

(viii) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 1

हल— सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a}$ का मान निम्न सूत्र से दिया जाता है—

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

अब $$|\vec{a}| = |2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

इसलिए $$\hat{a} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$ उत्तर

(ix) x तथा y के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j}$ और $x\hat{i} + y\hat{j}$ समान हों। 1

हल— प्रश्नानुसार, $2\hat{i} + 3\hat{j}$ और $x\hat{i} + y\hat{j}$ समान हैं तो

$x = 2, y = 3$ उत्तर

(x) दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिणाम क्रमशः 1 और 2 तथा $\vec{a}.\vec{b} = 1$। इन सदिशों के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। 1

हल— दिया हुआ है $\vec{a}.\vec{b} = 1$, $|\vec{a}| = 1$ और $|\vec{b}| = 2$ अतः हम जानते हैं कि

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

मान रखने पर $$\cos\theta = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

अतः $$\theta = \frac{\pi}{3}$$ उत्तर

खण्ड-ब

लघूत्तरीय प्रश्न—

प्रश्न 4. जाँच कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R^* = \{(a, b); a \leq b^2\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R^* न तो स्वतुल्य, न सममित और न ही संक्रामक है। 2

हल— R = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

$R^* = \{(a, b); a \leq b^2\}$ वास्तविक संख्याओं पर परिभाषित संबंध है।

(i) R^* स्वतुल्य नहीं है क्योंकि $a \leq a^2$ सदैव सत्य नहीं जैसे

$$\frac{1}{2} \not\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$$

(ii) R^* सममित नहीं है क्योंकि यदि $a = 2, b = 5$

तब $2 \leq 5^2 \Rightarrow (2,5) \in R^*$

लेकिन $5 \not\leq 2^2 \Rightarrow (5,2) \notin R^*$

अतः $(2,5) \in R \Rightarrow (5,2) \notin R^*$

(iii) R^* संक्रामक नहीं है। मान लीजिए $a = 2,\ b = -2$ और $c = -1$ तब $2 < (-2)^2$, $-2 < (-1)^2$ परन्तु $2 \not\leq (-1)^2$

अतः $(2,-2), \in R^*, (-2,-1) \in R^* \Rightarrow (2,-1) \in R^*$

इस प्रकार R^* स्वतुल्य, सममित व संक्रामक में कोई भी नहीं है।

प्रश्न 5. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $AA' = I$ 2

हल— $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \therefore A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$\therefore A'A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\cos\alpha)(\cos\alpha) + (-\sin\alpha)(-\sin\alpha) & (\cos\alpha)(\sin\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha \\ (\sin\alpha)(\cos\alpha) - \cos\alpha\sin\alpha & \sin\alpha \times \sin\alpha + (\cos\alpha)(\cos\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = KA - 2I$ हो तो K का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल— प्रश्नानुसार, $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 3 + (-2) \times 4 & 3 \times (-2) + (-2) \times (-2) \\ 4 \times 3 + (-2) \times 4 & 4 \times (-2) + (-2) \times (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

दिया है, $A^2 = KA - 2I$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ 4K & -2K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3K-2 & -2K \\ 4K & -2K-2 \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों को समान रखने पर

$$1 = 3K - 2$$
$$-2 = -2K$$
$$4 = 4K$$
$$-4 = -2K - 2$$

इन सभी समीकरणों से $K = 1$ प्राप्त होता है।

$\Rightarrow K = 1$ उत्तर

प्रश्न 7. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **2**

हल— हम जानते हैं कि $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$

$$|AB| = 14 - 25 = -11 \neq 0$$

$$\therefore \quad (AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot adj(AB)$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

और $|A| = -11 \neq 0$ व $|B| = 1 \neq 0$, इसलिए A^{-1} और B^{-1} दोनों का अस्तित्व है।

अतः $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

इसलिए $B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

प्रश्न 8. k का मान ज्ञात कीजिए यदि $f(x) = \begin{cases} kx+1, x \leq 5 \\ 3x-5, x > 5 \end{cases}$, $x = 5$ पर सतत हो। **2**

हल— प्रश्नानुसार, $f(x) = \begin{cases} kx+1, \text{ यदि } x \leq 5 \\ 3x-5, \text{ यदि } x > 5 \end{cases}$

$x = 5$ पर, $f(x) = kx + 1$ जब $x \le 5$

$\therefore$ $$\text{L.H.L} = \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (kx+1) = 5k+1$$

$$f(5) = k.(5)+1 = 5k+1$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (3x-5)$$
$$= 15 - 5 = 10$$

$\therefore$ $x = 5$ पर f संतत है यदि
L.H.L. = R.H.L. = $f(5)$

अर्थात् $5k+1=10$ $\therefore$ $k = \dfrac{9}{5}$ उत्तर

प्रश्न 9. दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है। 2

हल— $f(x) = |\cos x|$

हम जानते हैं कि $\cos x$ प्रत्येक बिन्दु पर संतत होता है तथा मापांक फलन भी सदैव संतत होते हैं। अतः $|\cos x|$ भी प्रत्येक बिन्दु पर संतत होगा।

प्रश्न 10. यदि $y = \sin^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ तब $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल— प्रश्नानुसार, $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

$x = \tan\theta$ रखने पर

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$= \sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right] = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

$\therefore$ $$y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} x$$

अब x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2}$$ उत्तर

प्रश्न 11. दिखाइए कि प्रदत्त फलन f, R पर एक वर्धमान फलन है— 2

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$$

हल— दिया गया फलन है

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, \ x \in R$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 + 1$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) + 1$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2 + 1 > 0, \text{ सभी } x \in R \text{ के लिए}$$

इसलिए फलन f. R पर वर्धमान है।

प्रश्न 12. $\int \frac{1}{1+\cot x} dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।** 2

हल— माना $I = \int \frac{1}{1+\cot x} dx$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{\cos x}{\sin x}} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2\sin x}{\sin x + \cos x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sin x + \cos x + \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

यहाँ $\sin x + \cos x = t$ रखने पर,

$\therefore \quad (\cos x - \sin x) dx = dt$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log|t| + C$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log|\sin x + \cos x| + C \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 13. वक्र $y = x^2$ एवं रेखा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2

हल— प्रश्नानुसार, परवलय $y = x^2$ का शीर्ष (0, 0) है और सममित रेखा OY है।

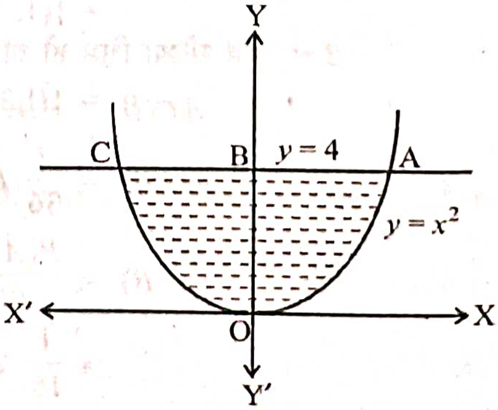
$y = x^2$ तथा $y = 4$ से घिरा क्षेत्रफल

$= OABCO$

$= 2 \times OABO$

$$= 2 \times \int_0^4 x\,dy$$

$$= 2 \times \int_0^4 \sqrt{y}\,dy$$



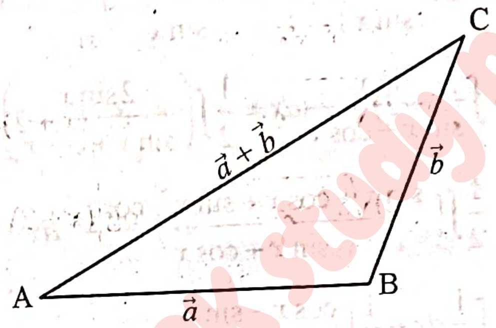
$$= 2\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 2\times\frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 0\right]$$

$$= \frac{4}{3}\times 8 = \frac{32}{3}$$ वर्ग इकाई उत्तर

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि दो सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लिए सदैव $|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ 2

हल— दी हुई असमिका सहज रूप से स्पष्ट है यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा

$\vec{b} = \vec{0}$ वास्तव में इस स्थिति में हम पाते हैं कि $|\vec{a}.\vec{b}| = 0 = |\vec{a}|$



$|\vec{b}|$ इसलिए हम कल्पना करते हैं कि $|\vec{a}| \ne 0 \ne |\vec{b}|$ तब हमें

$$\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$$ मिलता है।

इसलिए $|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

प्रश्न 15. यह दिया गया है कि दो पासों को एक साथ फेंकने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

हल— दो पासों को फेंकने से प्रतिदर्श समष्टि के परिणाम = 6 × 6 = 36 हैं।

मान लिया $A =$ दो संख्याओं का योग 4 है।

$= \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ $\Rightarrow n(A) = 3$

दो पासों को फेंकने पर समान संख्या वाले परिणाम

$= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$B =$ जब संख्या भिन्न हो तो ऐसे परिणाम = 36 − 6 = 30

$$A \cap B = \{(1,3),(3,1)\} \Rightarrow n(A \cap F) = 2$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}, P(B) = \frac{30}{36}$$

अतः $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{36} \div \frac{30}{36} = \frac{2}{30}$$

$$= \frac{1}{15}$$ उत्तर

खण्ड–स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न—

प्रश्न 16. $\int \sqrt{(x^2+4x-5)}\,dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।** 3

हल— माना कि

$$I = \int \sqrt{x^2+4x-5}\,dx = \int \sqrt{x^2+4x+4-9}\,dx$$

$$= \int \sqrt{(x+2)^2-9}\,dx$$

अब $\left[\because \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right]$

x के स्थान पर $x + 2$ और a^2 के स्थान पर 9 रखने पर

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{(x+2)^2-9} - \frac{9}{2}\log\left|(x+2)+\sqrt{(x+2)^2-9}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x-5} - \frac{9}{2}\log\left|(x+2)+\sqrt{x^2+4x-5}\right| + C$$ उत्तर

अथवा

$\int_0^1 \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।** 3

हल— माना कि $\quad I = \int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

यहाँ $x = \tan\theta$ रखने पर $\therefore dx = \sec^2\theta d\theta$

यदि $x = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$ तथा यदि $x = 0, \theta = 0$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/4} \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right).\sec^2\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin^{-1}(\sin 2\theta)\sec^2\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} 2\theta\sec^2\theta d\theta = 2\int_0^{\pi/4} \theta\sec^2\theta d\theta$$

ILATE के अनुसार θ को पहला और $\sec^2\theta$ को दूसरा फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I = 2[\theta.\tan\theta]_0^{\pi/4} - 2\int_0^{\pi/4} 1.\tan\theta d\theta$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} - 0 + |\log\cos\theta|_0^{\pi/4}\right] \qquad \because \int \tan\theta\, d\theta = -\log|\cos\theta| + C$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{4} + \log\cos\frac{\pi}{4} - \log\cos 0\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\log\sqrt{2} = \frac{\pi}{2} - 2.\frac{1}{2}\log 2$$

$$= \frac{\pi}{2} - \log 2 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 17. विन्दु (–2, 3) से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी विन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है। 3

हल— हम जानते हैं कि किसी वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता का मान $\frac{dy}{dx}$ होता है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) से चरों को पृथक्-पृथक् करने पर

$$y^2 dy = 2x\, dx \qquad ...(2)$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

अथवा
$$\frac{y^3}{3} = x^2 + C \qquad ...(3)$$

समीकरण (3) में $x = -2, y = 3$ प्रतिस्थापित करने पर हम C का मान प्राप्त कर सकते हैं।

अतः
$$\frac{3^3}{3} = (-2)^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad 9 = 4 + C \Rightarrow C = 5$$

C का समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें अभीष्ट वक्र का समीकरण

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + 5$$

अथवा $y^3 = 3x^2 + 15 \Rightarrow y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$ के रूप में प्राप्त होता है।

अथवा

किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि $r\%$ वार्षिक की दर से होती है। यदि 100 रुपये 10 वर्ष में दोगुने हो जाते हैं तो r का मान ज्ञात कीजिए। ($\log_e 2 = 0.6931$) 3

हल— माना किसी समय t पर मूलधन P है एवं दर r है

अत: $$\frac{dP}{dt} = \frac{Pr}{100}$$

$$\therefore \quad \frac{dP}{dt} = \frac{Pr}{100} \text{ या } \frac{dP}{P} = \frac{rdt}{100}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{r}{100} dt$$

या $$\log P = \frac{r}{100}t + \log C$$

$$\therefore \quad \log P - \log C = \frac{r}{100}t$$

या $$\log \frac{P}{C} = \frac{r}{100}t \text{ या } \frac{P}{C} = e^{\frac{r}{100}t}$$

$$P = Ce^{\frac{r}{100}t} \quad \ldots\text{(i)}$$

जब $t = 0$, P = 100 तो (i) से

$$100 = Ce^0 \Rightarrow C = 100$$

समीकरण (i) में C का मान रखने पर

$$P = 100e^{\frac{r}{100}t}$$

तथा जब $t = 10$, P = 200 तो (i) से

$$\therefore \quad 200 = 100e^{\frac{r}{100}10}$$

$$2 = e^{\frac{r}{10}}$$

$$\therefore \quad \frac{r}{10} = \log 2 = 0.6931 \text{ (दिया है)}$$

$$\therefore \quad r = 6.931 = 6.93\% \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 18. रेखाओं l_1 व l_2 के बीच में न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण है—

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ और } \vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k})$$ **3**

हल— समीकरण (1) व (2) की $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ से तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ और } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

इसलिए

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

और $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (-2+5)\hat{i} - (4-3)\hat{j} + (-10+3)\hat{k} = 3\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$$

इस प्रकार $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$

इसलिए दी गई रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$

मान रखने पर $d = \left|\frac{(3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k})(\hat{i} - \hat{k})}{\sqrt{59}}\right|$

$$= \left|\frac{3-0+7}{\sqrt{59}}\right| = \frac{10}{\sqrt{59}}$$ उत्तर

अथवा

दिये गये रेखा युग्म के मध्य कोण ज्ञात कीजिए— 3

$\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ **और** $\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

हल— पहली रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$

सदिश $\vec{b}_1 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ की दिशा में है।

दूसरी रेखा $\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

सदिश $\vec{b}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में है।

माना कि दोनों रेखाओं के बीच का कोण θ है अतः

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 . \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

$$= \left|\frac{(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}).(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{|3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}||\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}|}\right|$$

$$= \left|\frac{3.1 + 2.2 + 6.2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{\sqrt{9+4+36}\sqrt{1+4+4}}\right| = \left|\frac{19}{\sqrt{49}\sqrt{9}}\right|$$

$$= \left|\frac{19}{7 \times 3}\right| = \frac{19}{21}$$

अतः $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$ उत्तर

प्रश्न 19. एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं। एक अन्य थैले में 2 लाल एवं 6 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से एक यादृच्छया चुना जाता है एवं एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है, कि गेंद पहले थैले से निकाली गई है? **3**

हल— माना कि पहले थैले के चुनने की घटना को E_1 से और दूसरे थैले को चुनने की घटना को E_2 से व्यक्त करते हैं तथा लाल गेंद निकालने की घटना को E से दर्शाते हैं।

एक थैले को चुनने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

अर्थात् $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

पहले थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं।

$\therefore$ पहले थैले से लाल गेंद चुनने की प्रायिकता

$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

अर्थात् $P(E/E_1) = \frac{1}{2}$

दूसरे थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं।

$\therefore$ दूसरे थैले से एक लाल गेंद चुनने की प्रायिकता

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

अर्थात् $P(E/E_2) = \frac{1}{4}$

अब हमें ज्ञात करना है कि लाल गेंद पहले थैले से निकाले जाने की प्रायिकता $= P(E_1/E)$

अब बेज प्रमेय से

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \text{ उत्तर}$$

अथवा

A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित्त प्रदर्शित हुआ है। वास्तव में चित प्रदर्शित होने की क्या प्रायिकता है? **3**

हल— माना कि E_1 : सिक्के पर चित प्रकट होना है।
तथा E_2 : सिक्के पर पट प्रकट होना है।
तब E_1 तथा E_2 परस्पर अपवर्जी तथा असंयुक्त हैं,

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

माना कि E : A ने बताया कि चित प्रकट हुआ है।

तब $P\left(\frac{E}{E_1}\right) = P$ (चित प्रकट हुआ है और A ने सही बताया है)

$$= \frac{4}{5}$$

तथा $P\left(\frac{E}{E_2}\right) = P$ (पट प्रकट हुआ है और A असत्य बोल रहा है)

$$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

इसलिए अभीष्ट प्रायिकता

$$= P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P\left(\frac{E}{E_1}\right)P(E_1)}{P\left(\frac{E}{E_1}\right)P(E_1) + P\left(\frac{E}{E_2}\right)P(E_2)}$$

$$= \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5}$$ उत्तर

खण्ड-द

निबन्धात्मक प्रश्न—

प्रश्न 20. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

हल— मान लीजिए कि

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\,dx}{a^2 \cos^2(\pi - x) + b^2 \sin^2(\pi - x)}$$

$$\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - \text{I}$$

अतः $$2\text{I} = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

अथवा $$\text{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$= \frac{\pi}{2}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$ (P_7 के उपयोग

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 + \cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + \cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x dx}{a^2 + b^2\tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{cosec}^2 x dx}{a^2\cot^2 x + b^2}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{1} \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} - \int_1^{0} \frac{dt}{a^2u^2 + b^2}\right]$$ (रखिए $\tan x = t$ और $\cot x = u$)

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^1 - \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{au}{b}\right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a} + \tan^{-1}\frac{a}{b}\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2ab}$$

अथवा

$\int \sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।** **4**

हल— हम पाते हैं कि

$$\text{I} = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx$$

$$= \int \sqrt{\tan x}(1 + \cot x)\, dx$$

अब $\tan x = t^2$, रखने पर $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

अथवा $$dx = \frac{2t\,dt}{1+t^4}$$

तब $$I=\int t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{2t}{(1+t^4)}\,dt$$

$$=2\int\frac{(t^2+1)}{t^4+1}\,dt=2\int\frac{1+\frac{1}{t^2}\,dt}{t^2+\frac{1}{t^2}}$$

$$=2\int\frac{1+\frac{1}{t^2}dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$$

पुनः $t-\frac{1}{t}=y$, रखने पर $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=dy$

तब $$I=2\int\frac{dy}{y^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}}+C=\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right)+C$$

$$=\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}\right)+C$$ उत्तर

प्रश्न 21. रेखाएँ जिनका सदिश समीकरण निम्न है के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए— 4

$$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k} \text{ और } \vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$$

हल— प्रश्नानुसार पहली रेखा का समीकरण

$$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$$
$$=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}+t(-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$$

$\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ से इसकी तुलना करने पर

$$\vec{a}_1=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k} \text{ तथा } \vec{b}_1=-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$$

प्रश्नानुसार दूसरी रेखा

$$\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$$

या $$\vec{r}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+s(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$$

$\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$ से इसकी तुलना करने पर

$$\vec{a}_2=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k},\ \vec{b}_2=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$$

हम जानते हैं कि ऐसा

$$\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1 \text{ और } \vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}_2 \text{ के बीच}$$

न्यूनतम दूरी $$d=\left|\frac{(\vec{a}_2-\vec{a}_1).(\vec{b}_1\times\vec{b}_1)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}\right| \quad ...(1)$$

यहाँ $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{j} - 4\hat{k}$

तथा $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} \times 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2+4)\hat{i} - (2+2)\hat{j} + (-2-1)\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

अतः $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{4 + (-4)^2 + (-3)^2}$

$$= \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

इनका मान समी. (1) में रखने पर

$$d = \left| \frac{(\hat{j} - 4\hat{k}).(2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{29}} \right|$$

$$= \left| \frac{0 \times 2 + 1 \times -4 + (-4)(-3)}{\sqrt{29}} \right|$$

$$= \left| \frac{-4+12}{\sqrt{29}} \right| = \frac{8}{\sqrt{29}}$$ उत्तर

अथवा

p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लंबवत हों। **4**

हल— दी हुई रेखाओं को मानक रूप में रखने पर

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{\frac{2p}{7}} = \frac{z-3}{2} \text{ और } \frac{x-1}{-\frac{3p}{7}} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$$

अब पहली रेखा के दिक्-अनुपात $= 3, \frac{2p}{7}, 2$

तथा दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात $= \frac{-3p}{7}, 1, -5$

अर्थात् माना कि $a_1 = -3, b_1 = \frac{2p}{7}, c_1 = 2$ तथा $a_2 = -\frac{3p}{7}, b_2 = 1, c_2 = -5$

ये रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

अर्थात् $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = (-3)\left(\frac{-3p}{7}\right) + \left(\frac{2p}{7}\right) \times 1 + 2 \times (-5) = 0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{9p}{7}+\frac{2p}{7}-10 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{11p}{7}-10 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad p = 10\times\frac{7}{11}=\frac{70}{11}$$ उत्तर

प्रश्न 22. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z=-3x+4y$ का आलेखीय विधि से न्यूनतमीकरण कीजिए। 4

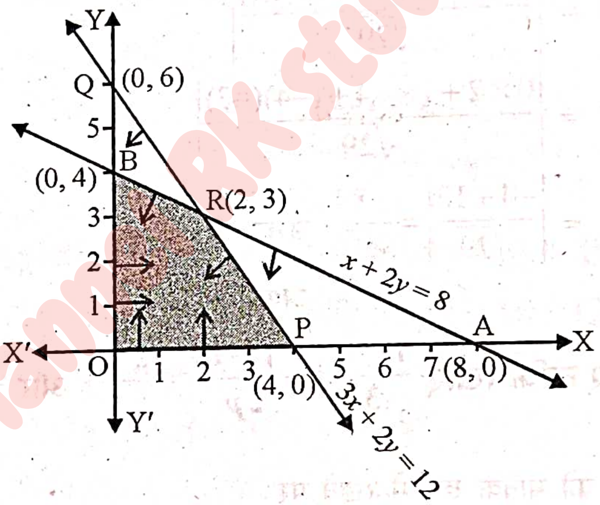
$$x+2y\leq 8,\ 3x+2y\leq 12,\ x\geq 0, y\geq 0$$

हल— प्रश्नानुसार $Z = -3x + 4y$, अवरोध हैं

$x + 2y \leq 8$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

(i) **$x + 2y \leq 8$ का क्षेत्र**—रेखा $x + 2y = 8$, A(8, 0) और B(0, 4) से गुजरती है, रेखा AB इसका आरेख है $x = 0$, $y = 0$, असमिका $x + 2y \leq 8$ में रखने पर $0 \leq 8$ जो सत्य है।

अर्थात् $x + 2y \leq 8$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा $x + 2y = 8$ पर और उसके नीचे मूल बिन्दु की ओर हैं।



(ii) **$3x + 2y \leq 12$ का क्षेत्र**— रेखा $3x + 2y = 12$ बिन्दु P(4, 0) और Q(0, 6) से होकर जाती है। इसका आरेख PQ है। अत: $3x + 2y \leq 12$ में $x = 0$, $y = 0$ रखने पर $0 \leq 12$ जो सत्य है। अर्थात् इसके क्षेत्र के बिन्दु रेखा $3x + 2y = 12$ पर और इसके नीचे मूल बिन्दु की ओर है।

(iii) $x \geq 0$, इस क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और y-अक्ष के दायीं ओर हैं।

(iv) $y \geq 0$ का इस क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और उसके ऊपर हैं।

इस प्रकार इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र OBRP है।

रेखा $\quad AB = x + 2y = 8$ ....(1)

और $\quad PQ = 3x + 2y = 12$ ....(2)

बिन्दु R पर प्रतिच्छेदन करती है।

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर

$2x = 12 - 8 = 4 \quad \therefore x = 2$

समीकरण (1) से $2 + 2y = 8, y = 3$

$\therefore$ बिन्दु R(2, 3) हैं।

इस प्रकार कोनीय बिन्दु हैं O(0, 0), P(4, 0), R(2, 3) तथा B(0, 4) । अब इन कोनीय बिन्दुओं का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = -3x + 4y$
O(0, 0)	$Z = -3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$
P(4, 0)	$Z = -3 \times 4 + 4 \times 0 = -12 \rightarrow$ न्यूनतम
R(2, 3)	$Z = -3 \times 2 + 4 \times 3 = 6$
B(0, 4)	$Z = -3 \times 0 + 4 \times 4 = 16$

अतः कोनीय बिन्दु P(4, 0) पर Z का न्यूनतम मान = – 12 उत्तर

अथवा

निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = x + y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए। 4

$$x - y \leq -1, \; -x + y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$$

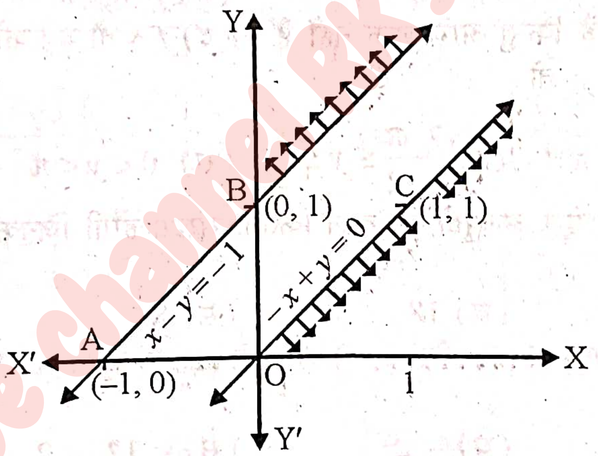
हल— उद्देश्य फलन $Z = x + y$, अवरोध $x - y \leq -1, -x + y \leq 0, x, y \geq 0$

(i) **$x - y \leq -1$ का क्षेत्र—**

रेखा $x - y = -1$ बिन्दु A(– 1, 0), B(0, 1) से होकर जाती है, इसका आरेख रेखा AB है।

$x - y \leq -1$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर

$0 \leq -1$ जो सत्य नहीं है।



अर्थात् $x - y \leq -1$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा AB पर और उसके ऊपर हैं।

(ii) **$-x + y \leq 0$ का क्षेत्र—**

रेखा $-x + y = 0$, मूल बिन्दु O और C(1, 1) से होकर जाती है।

$-x + y \leq 0$ में $x = 1, y = 0$ रखने पर $-1 \leq 0$ जो सत्य है।

अर्थात् $-x + y \leq 0$ के क्षेत्र बिन्दु OC पर या उसके नीचे (1, 0) की ओर हैं।

(iii) $x \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु Y-अक्ष पर और X-अक्ष के दायीं ओर हैं।

(iv) $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु X-अक्ष पर और X-अक्ष के ऊपर स्थित हैं।

विवेचन से स्पष्ट है कि ऐसा कोई बिन्दु नहीं है जो सभी व्यवरोधों को एक साथ सन्तुष्ट कर सके।

अतः इस समस्या का कोई सुसंगत क्षेत्र नहीं है।

तथा Z का अधिकतम मान नहीं है। उत्तर

मॉडल पेपर-2 (अभ्यासार्थ)

उच्च माध्यमिक परीक्षा, कक्षा 12

विषय : गणित

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक-साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
6. प्रश्न क्रमांक 16 से 22 में आन्तरिक विकल्प है।

खण्ड-अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न—

(i) मान लीजिए कि $f : R \to R$, $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है। 1

सही उत्तर का चयन कीजिए—

(अ) f एकैकी आच्छादक है (ब) f बहुएक आच्छादक है

(स) f एकैकी है किन्तु आच्छादक नहीं है (द) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

(ii) यदि $\sin^{-1} x = y$, तो 1

(अ) $0 \le y \le \pi$ (ब) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (स) $0 < y < \pi$ (द) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

(iii) 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होंगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है? 1

(अ) 27 (ब) 18 (स) 81 (द) 512

(iv) यदि शीर्ष $(2, -6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान है— 1

(अ) 12 (ब) -2 (स) $-12, -2$ (द) $12, -2$

(v) फलन $\sin(\log x)$ का अवकलज है— 1

(अ) $\cos(\log x)$ (ब) $-\cos(\log x)$ (स) $\frac{\cos(\log x)}{x}$ (द) $\frac{-\cos(\log x)}{x}$

(vi) एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 15$ है तो सीमान्त आय है— 1

(अ) 116 (ब) 96 (स) 90 (द) 126

(vii) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रतिअवकलज है— 1

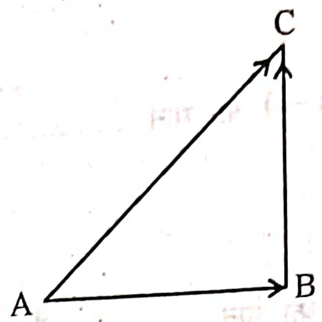
(अ) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$ (ब) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C$

(स) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$ (द) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

(viii) अवकल समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4}+\sin(y''')=0$ की घात है— 1

(अ) 4 (ब) 3 (स) 1 (द) अपरिभाषित

(ix) त्रिभुज ABC (आकृति) के लिए निम्नलिखित में से कौनसा कथन सही नहीं है— 1



(अ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ (ब) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(स) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ (द) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(x) यदि एक रेखा x, y तथा z-अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ क्रमशः 90°, 60° तथा 30° का कोण बनाती है, तो रेखा के दिक्-कोसाइन हैं— 1

(अ) $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ब) $\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$ (स) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$ (द) $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$

(xi) रेखा युग्म $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{4}$ और $\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2}$ के मध्य कोण है— 1

(अ) $\cos^{-1}\left(\frac{-8\sqrt{3}}{15}\right)$ (ब) $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$

(स) $\sin^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ (द) $\sin^{-1}\left(\frac{-8\sqrt{3}}{15}\right)$

(xii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का क्षेत्रफल है— 1

(अ) ab (ब) πa^2 (स) πb^2 (द) πab

(xiii) वक्र $x=0$ एवं $x=2\pi$ के मध्य वक्र $y=\cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है— 1

(अ) 4 वर्ग इकाई (ब) 3 वर्ग इकाई (स) 2 वर्ग इकाई (द) 1 वर्ग इकाई

(xiv) यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A/B)=P(B/A)\neq 0$, तब— 1

(अ) $A\subset B$ (ब) A = B (स) $A\cap B=\phi$ (द) $P(A)=P(B)$

(xv) यदि A और B ऐसी घटनाएँ हैं कि $A\subset B$ तथा $P(B)\neq 0$, तो निम्न में से कौन ठीक है? 1

(अ) $P(A/B)=\frac{P(B)}{P(A)}$ (ब) $P(A/B)<P(A)$

(स) $P(A/B)\geq P(A)$ (द) इनमें से कोई नहीं

उत्तर—

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)	(xiii)	(xiv)	(xv)

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान .... है। **1**

हल— ....

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\text{cosec}^{-1}(-2)$ का मान .... है। **1**

हल— ....

(iii) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\sec^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ का मान .... है। **1**

हल— ....

(iv) यदि $y=\cos(\sqrt{x})$ तो $\frac{dy}{dx}$ = ... **1**

हल— ....

(v) यदि $f(x)=3+(x), x\in R$ तो $f(x)$ का स्थानीय निम्नतम मान .... है। **1**

हल— ....

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+2y=\sin x$ का समाकलन गुणांक .... है। **1**

हल— ....

(vii) सदिश $\vec{b}=2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}$ का परिमाण .... है। **1**

हल— ....

3. अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न—

(i) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

हल— ....

....

....

....

(ii) आव्यूह $A=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए। **1**

हल— ....

....

....

....

(iii) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान है। 1

हल— ....

....

....

....

....

(iv) एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंध कुल लागत $C(x)$ (रुपये में) $C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ से प्रदत्त है। सीमान्त लागत ज्ञात कीजिए जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है। 1

हल— ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(v) $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

....

....

....

....

....

(vi) $\int e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(vii) तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(viii) सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 7 इकाई है। 1

हल—

(ix) x, y और z के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ समान है। 1

हल—

(x) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ और 2 हैं और $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। **1**

हल—

खण्ड-ब

लघूउत्तरीय प्रश्न—

4. मान लीजिए कि T किसी समतल में स्थित समस्त त्रिभुजों का एक समुच्चय है। समुच्चय T में $R = \{T_1, T_2) : T_1, T_2$ के सर्वांगसम है } एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। **2**

हल—

5. X ज्ञात कीजिए यदि $Y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ तथा $2X + Y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ **2**

हल—

6. यदि $A=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ तो $\frac{1}{2}(A+A')$ ज्ञात कीजिए। 2

हल—

7. आव्यूह $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 2

हल—

8. k का मान ज्ञात कीजिए यदि $f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{यदि } x \leq 2 \\ 3, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 2$ पर सतत है। 2

हल—

9. दर्शाइए कि $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है। 2

हल—

10. यदि $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

11. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान फलन है। 2

हल—

12. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

13. $y = |x+3|$ का ग्राफ खींचिए एवं $\int_{-6}^{0} |x+3| dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

14. यदि $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ हो तो सत्यापित करो कि $\vec{a}\times\vec{b}$ द्वारा निरूपित सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों सदिशों के लम्बवत् है। 2

हल—

15. एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न, 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न, 500 बहु-विकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न और 400 बहु-विकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह से एक प्रश्न यादृच्छया चुना जाता है तो एक आसान प्रश्न की बहु-विकल्पीय होने की प्रायिकता क्या होगी? 2

हल—

खण्ड-स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न—

16. $\int\sqrt{1-4x^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

$\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

हल—

19. दो थैले I और II दिए हैं। थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं जबकि थैले II में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले II से निकाली गई है? 3

अथवा

कल्पना कीजिए कि 5% पुरुषों और 0.25% महिलाओं के बाल सफेद हैं। सफेद बालों वाले एक व्यक्ति को यादृच्छिक चुना गया है। इस व्यक्ति के पुरुष होने की प्रायिकता क्या है? यह मान लें कि पुरुषों और महिलाओं की संख्या समान है। 3

हल—

खण्ड-द

निबन्धात्मक प्रश्न—

20. $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

$\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

हल—

21. रेखाओं $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

सरल रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि एक बिन्दु से गुजरती है जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ तथा रेखा सदिश $\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के समान्तर है। इसका कार्तीय रूप में रूपान्तरण भी कीजिए। 4

22. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण आलेखीय विधि से कीजिए :
$x + y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 4

अथवा

निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 2y$ का अधिकतमीकरण कीजिए :
$x + 2y \leq 10,\ 3x + y \leq 15,\ x,\ y \geq 0$ 4

हल—

दिनांक .... प्राप्तांक .... ह. अध्यापक ....

पूर्णांक—80

मॉडल पेपर-3 (अभ्यासार्थ)

उच्च माध्यमिक परीक्षा, कक्षा 12

विषय : गणित

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।

2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक-साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
6. प्रश्न क्रमांक 16 से 22 में आन्तरिक विकल्प है।

खण्ड-अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न—

(i) मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ है। सही उत्तर चुनिए— 1
(अ) f एकैकी आच्छादक है (ब) f बहुएक आच्छादक है
(स) f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है (द) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

(ii) $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान— 1
(अ) π है (ब) $-\frac{\pi}{2}$ है (स) 0 है (द) $2\sqrt{3}$ है

(iii) x तथा y के प्रदत्त किन मानों के लिए आव्यूहों के निम्नलिखित युग्म समान हैं? 1
$$\begin{bmatrix}3x+7 & 5\\ y+1 & 2-3x\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & y-2\\ 8 & 4\end{bmatrix}$$
(अ) $x=\frac{-1}{3}, y=7$ (ब) ज्ञात करना संभव नहीं है
(स) $y=7, x=\frac{-2}{3}$ (द) $x=\frac{-1}{3}, y=\frac{-2}{3}$

(iv) यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो $\det(A^{-1})$ बराबर— 1
(अ) det (A) (ब) $\frac{1}{\det(A)}$ (स) 1 (द) 0

(v) यदि $x=a\cos\theta, y=b\cos\theta$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान है— 1
(अ) $\frac{a}{b}$ (ब) $-\frac{a}{b}$ (स) $-\frac{b}{a}$ (द) $\frac{b}{a}$

(vi) एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। जब त्रिज्या 10 सेमी है तब त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर है— 1
(अ) 400 सेमी^{2} (ब) 40π सेमी^{3} (स) 400π सेमी^{3}/सेमी (द) इनमें से कोई नहीं

(vii) $\int\frac{10x^9+10^x\log_e 10}{x^{10}+10^x}dx$ बराबर है— 1
(अ) $10^x-x^{10}+C$ (ब) $10^x+x^{10}+C$
(स) $(10^x-x^{10})^{-1}+C$ (द) $\log(10^x+x^{10})+C$

(viii) अवकल समीकरण $y'''+y^2+e^{y'}=0$ की कोटि है— 1
(अ) 2 (ब) 1 (स) 3 (द) 0

(ix) यदि शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण a है और λ एक शून्येतर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि— 1

(अ) $\lambda=1$ (ब) $\lambda=-1$ (स) $a=|\lambda|$ (द) $a=\frac{1}{|\lambda|}$

(x) x-अक्ष की दिक्-कोसाइन है— 1
(अ) 1, 0, 0 (ब) 0, 1, 0 (स) 0, 0, 1 (द) 0, 0, 0

(xi) रेखाओं $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-3}$ तथा $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-5}{4}$ के मध्य कोण है— 1
(अ) $\cos^{-1}\left(-\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ब) $\cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$
(स) $\sin^{-1}\left(-\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (द) $\sin^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$

(xii) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2+y^2=4$ एवं रेखाओं $x=0, x=2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है— 1
(अ) π (ब) $\frac{\pi}{2}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{4}$

(xiii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है— 1
(अ) 4π वर्ग इकाई (ब) 2π वर्ग इकाई (स) π वर्ग इकाई (द) 6π वर्ग इकाई

(xiv) यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि P(A) + P(B) − P(A और B) = P(A) तब— 1
(अ) P(B/A) = 1 (ब) P(A/B) = 1 (स) P(B/A) = 0 (द) P(A/B) = 0

(xv) दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते हैं यदि— 1
(अ) A और B परस्पर अपवर्जी हैं (ब) $P(A'B')=[1-P(A)][1-P(B)]$
(स) P(A) = P(B) (द) P(A) + P(B) = 1

उत्तर—

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)	(xiii)	(xiv)	(xv)

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

(i) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(ii) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(iii) $\sec^{-1}(-2)-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(iv) यदि $x-y=\pi$ तो $\frac{dy}{dx}$ = ... 1

हल— ....

(v) यदि $f(x)=-(x-10)^2+10$ तो $f(x)$ का अधिकतम मान .... है। 1

हल— ....

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+3y=e^{-2x}$ का समाकल गुणांक .... है। 1

हल— ....

(vii) सदिश $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$ का योगफल .... है। 1

हल— ....

3. अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न—

(i) सारणिक $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(ii) यदि $\begin{vmatrix}3 & 3 \\ x & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & x \\ 1 & 1\end{vmatrix}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(iii) सिद्ध कीजिए R पर $f(x)=3x+17$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है। 1

हल— ....

(iv) किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपये में $R(x)=3x^2+36x+5$ से प्रदत्त है। जब $x=5$ हो तो सीमान्त आय ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

....

(v) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(vi) $\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(vii) प्रदर्शित कीजिए कि $y=x^2+2x+C$ अवकल समीकरण $y^1-2x-2=0$ का व्यापक हल है। 1

हल—

(viii) सदिशों $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ और $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(ix) यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ और $\vec{a}\,.\,\vec{b}=4$ तो $|\vec{a}-\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए। 1

हल—

1

(x) यदि $\vec{a}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

हल—

खण्ड-ब

लघूउत्तरीय प्रश्न—

4. सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय A में, R = {(T_1, T_2) : T_1, T_2 के समरूप है} द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है। 2

हल—

2

5. यदि $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$

हल—

6. एक ऐसे 3×2 आव्यूह की रचना कीजिये, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ द्वारा प्रदत्त हैं। 2

हल—

7. सत्यापित कीजिए $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| \cdot I$ जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ 2

हल—

8. $x = \frac{\pi}{2}$ पर निम्न फलन के सांतत्य का परीक्षण कीजिये—

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ 2

हल—

9. दर्शाइए कि $g(x) = x - [x]$ द्वारा परिभाषित फलन समस्त पूर्णांक बिन्दुओं पर असंतत है। यहाँ $[x]$ उस महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है, जो x के बराबर या x से कम है। 2

हल—

10. यदि $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

11. अन्तराल ज्ञात कीजिये जिसमें फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$ वर्धमान है। 2

हल—

12. $\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

13. समाकलन का प्रयोग कर वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात करो। 2

हल—

14. सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ और $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 2

हल—

15. किसी व्यक्ति ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया है। हड़ताल होने की प्रायिकता 0.65 है। हड़ताल न होने की तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.80 तथा 0.32 हैं। निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

हल—

खण्ड-स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न—

16. $\int \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

$\int x \tan^{-1} x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

हल—

17. एक वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता स्पर्श बिन्दु को, बिन्दु $(-4, -3)$ से मिलाने वाले रेखाखण्ड की प्रवणता की दुगुनी है। यदि यह वक्र बिन्दु $(-2, 1)$ से गुजरता हो तो इस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

अवकल समीकरण $(x - y)\,(dx + dy) = dx - dy$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = -1$ यदि $x = 0$ (संकेत : $x - y = t$ रखें)। 3

हल—

18. रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण हैं। 3

$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ ....(1)

और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ ....(2)

अथवा

दर्शाइए कि दिक्-कोसाइन $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ वाली तीन रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं। 3

हल—

19. तीन अभिन्न डिब्बे I, II और III दिए गए हैं जहाँ प्रत्येक में दो सिक्के हैं। डिब्बे I में दोनों सिक्के सोने के हैं, डिब्बे II में दोनों सिक्के चाँदी के हैं और डिब्बे III में एक सोने और एक चाँदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से यादृच्छया एक सिक्का निकालता है। यदि सिक्का सोने का है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का ही है? 3

अथवा

तीन सिक्के दिए गए हैं। एक सिक्के के दोनों ओर चित ही है। दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है और तीसरा सिक्का अनभिनत है। तीनों में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया है। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो क्या प्रायिकता है कि वह दोनों चित वाला सिक्का है? 3

हल—

खण्ड-द

निबन्धात्मक प्रश्न—

20. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

हल—

21. प्रदर्शित कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ और $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-6}{5}$ आपस में काटती हैं। प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

बिन्दु P(1, 2, 3) से रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ पर PN लम्ब डाला गया है, तो निम्न को ज्ञात कीजिए—

(i) बिन्दु N के निर्देशांक

(ii) PN की लम्बाई। 4

हल—

22. आलेख द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।
निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$x + y \leq 50$ ....(1)

$3x + y \leq 90$ ....(2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ....(3)

$z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

आलेखीय विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

व्यवरोधों $x + 2y \leq 12$

$2x + y \leq 12$

$x + \frac{5}{4}y \geq 5; x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत

$Z = 60x + 40y$ का अधिकतमीकरण कीजिए। 4

हल—

दिनांक .... प्राप्तांक .... ह. अध्यापक ....

पूर्णांक—80

मॉडल पेपर-4 (अभ्यासार्थ)
उच्च माध्यमिक परीक्षा, कक्षा 12
विषय : गणित

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यत: लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक-साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
6. प्रश्न क्रमांक 16 से 22 में आन्तरिक विकल्प है।

खण्ड-अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न—

(i) समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या है— 1

(अ) n (ब) $\frac{n}{2}$ (स) $\underline{|n}$ (द) $\frac{\underline{|n}}{2}$

(ii) $\sin(\tan^{-1}x), |x|<1$ बराबर होता है— 1

(अ) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ब) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (स) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (द) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(iii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि— 1

(अ) $m > n$ (ब) $m < n$ (स) $m = n$ (द) $m = -n$

(iv) यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|adj A|$ का मान है— 1

(अ) $|A|$ (ब) $|A|^2$ (स) $|A|^3$ (द) $3|A|$

(v) यदि $y = x\cos x$, तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ बराबर है— 1

(अ) $-2\sin x - x\cos x$ (ब) $-2\sin x + x\cos x$
(स) $2\sin x - x\cos x$ (द) $2\sin x + x\cos x$

(vi) एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 सेमी/से. की दर से बढ़ रहा है। जब किनारा 10 सेमी लम्बा हो तब घन के आयतन बढ़ने की दर है— 1

(अ) 900 सेमी^{3}/से. (ब) 90 सेमी^{3}/से. (स) 300 सेमी^{3}/से. (द) 30 सेमी^{3}/से.

(vii) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ बराबर है— 1

(अ) $\tan x + \cot x + C$ (ब) $\tan x - \cot x + C$
(स) $\tan x \cot x + C$ (द) $\tan x - \cot 2x + C$

(viii) अवकल समीकरण $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$ की घात है— 1

(अ) 3 (ब) 2 (स) 1 (द) अपरिभाषित

(ix) एक आयत के शीर्षों A, B, C और D जिसके स्थिति सदिश क्रमश: $-\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, $\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, $\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, $-\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, है, का क्षेत्रफल है : 1

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) 1 (स) 2 (द) 4

(x) दो बिन्दुओं (–2, 4, –5) और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा के दिक्-कोसाइन हैं— 1

(अ) $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$ (ब) $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$
(स) $\frac{-3}{\sqrt{77}}, \frac{2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$ (द) $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{2}{\sqrt{77}}, \frac{-8}{\sqrt{77}}$

(xi) रेखाओं $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$ के मध्य कोण है— 1

(अ) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (ब) $-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (स) $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$ (द) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

(xii) वक्र $y = x|x|$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है— 1

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{2}{3}$ (द) $\frac{4}{3}$

(xiii) परवलय $x^2 = 4y$ तथा इसका नाभिलम्ब द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है— 1

(अ) $\frac{5}{3}$ (ब) $\frac{2}{3}$ (स) $\frac{4}{3}$ (द) $\frac{8}{3}$

(xiv) दो पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है— 1

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{1}{12}$ (द) $\frac{1}{36}$

(xv) यदि A और B दो ऐसी घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0, P(B/A) = 1$ तब— 1

(अ) $A \subset B$ (ब) $B \subset A$ (स) $B = \phi$ (द) $A = \phi$

उत्तर—

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)	(xiii)	(xiv)	(xv)

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

(i) $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(iii) $2\sec^{-1}2 + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(iv) यदि $2x + 3y = \sin x$ तो $\frac{dy}{dx} =$ 1

हल— ....

(v) यदि $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$ तो $f(x)$ का निम्नतम मान .... है। 1

हल— ....

(vi) अवकल समीकरण $\frac{xdy}{dx} + 2y = x^2 (x \neq 0)$ का समाकल गुणांक .... है। 1

हल— ....

(vii) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ में अनुदिश मात्रक सदिश .... है। 1

हल— ....

3. अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न—

(i) यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ तो x के मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(ii) $\begin{vmatrix} \cos 50^\circ & \sin 10^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 10^\circ \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(iii) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = x^2 + 2x + 5$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान है। 1

हल— ....

(iv) किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत $C(x)$ इसके में $C(x) = 0.005x^3 - 0.02x^2 + 30x + 5000$ से प्रदत्त है। सीमान्त लागत ज्ञात कीजिए, जब 3 इकाई उत्पादित की जाती है। 1

हल— ....

(v) $\int x\sqrt{1 + 2x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(vi) $\int x \log 2x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(vii) प्रदर्शित कीजिए कि $y = x \sin x$ अवकल समीकरण $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ का व्यापक हल है। 1

हल—

(viii) यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$ के लिए $(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{x}+\vec{a}) = 12$ हो तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(ix) यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, $\hat{i}$ के साथ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ और $\hat{k}$ के साथ एक न्यून कोण θ बनाता है तो θ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(x) दर्शाइए कि $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = 2(\vec{a}\times\vec{b})$ 1

हल—

खण्ड-ब

लघूत्तरीय प्रश्न—

4. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है : 2

$R = \{(a, b) : |a - b|, 4 \text{ का एक गुणज है}\}$

हल—

5. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ हैं तो सत्यापित कीजिए कि 2

$(A - B)' = A' - B'$

हल—

6. एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ से प्रदत्त हैं। 2

हल—

7. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 2

हल—

8. निम्न फलनों की $x = 0$ पर सांतत्यता की जाँच कीजिए— 2

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

हल—

9. λ के किस मान के लिए $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{यदि } x \leq 0 \\ 4x + 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 0$ पर संतत है। 2

हल—

10. यदि $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

11. वह अन्तराल ज्ञात कीजिये जब फलन $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ द्वारा प्रदत्त फलन f वर्धमान है। 2

हल—

12. $\int \tan^4 x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

13. वक्र $y = 2\sqrt{1-x^2}$ तथा x-अक्ष के ऊपर परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2

हल—

14. दर्शाइए कि बिंदु $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$, $B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$, $C(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। 2

हल—

15. एक पासे को तीन बार उछाला जाता है तो कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

हल—

खण्ड-स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न—

16. $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

$\int (\sin^{-1} x)^2 dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

हल—

17. बिन्दु (0, 2) से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिन्दु के निर्देशांकों का योग उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के परिमाण से 5 अधिक है। 3

अथवा

एक गोलाकार गुब्बारे का आयतन, जिसे हवा भर कर फुलाया जा रहा है, स्थिर गति से बदल रहा है। यदि आरम्भ में इस गुब्बारे की त्रिज्या 3 इकाई है और 3 सेकण्ड बाद 6 इकाई है तो t सेकण्ड बाद उस गुब्बारे की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। 3

हल—

18. रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ तथा

$\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ 3

अथवा

उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-2, 4, -5)$ से जाती है और $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समान्तर है। इस रेखा का सदिश समीकरण भी लिखिए। 3

हल—

19. मान लें कि एक एच.आई.वी. परीक्षण की विश्वसनीयता निम्नलिखित प्रकार से निर्दिष्ट की गई है—

एच.आई.वी. पोजीटिव व्यक्तियों के लिए परीक्षण 90% पता लगाने में और 10% पता न लगाने में सक्षम है। एच.आई.वी. से स्वतंत्र व्यक्तियों के लिए परीक्षण 99% सही पता लगाता है यानी एच.आई.वी. नेगेटिव बताता है जबकि 1% परीक्षित व्यक्तियों के लिए एच.आई.वी. पोजीटिव बताता है। एक बड़ी जनसंख्या, जिसमें 0.1% व्यक्ति एच.आई.वी. ग्रस्त है, में से एक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है और उसका परीक्षण किया जाने पर रोगविज्ञानी एच.आई.वी. की उपस्थिति बताता है। क्या प्रायिकता है कि वह व्यक्ति वास्तव में एच.आई.वी. (पोजीटिव) है? 3

अथवा

थैला I में 3 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं तथा थैला II में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं। एक गेंद को थैला I से थैला II में स्थानान्तरित किया जाता है और तब एक गेंद थैले II से निकाली जाती है। निकाली गई गेंद लाल रंग की है। स्थानान्तरित गेंद की काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 3

हल—

खण्ड-द

निबन्धात्मक प्रश्न—

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

हल—

21. दी गई रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए—

$\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ तथा

$\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$ 4

अथवा

सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं $A(0,-1,-1)$ और $B(4,5,1)$ से जाने वाली रेखा बिन्दुओं $C(3,9,4)$ और $D(-4,4,4)$ से जाने वाली रेखा को प्रतिच्छेदित करती है। 4

हल—

22. आलेखीय विधि से निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए : 4

$x + 3y \geq 3, x + y \geq 2, x, y \geq 0$

अथवा

आलेखीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।

$x + 2y \geq 10, \quad x + y \geq 6, \quad 3x + y \geq 8, \quad x, y \geq 0$ 4

$z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

हल—

दिनांक .... प्राप्तांक .... ह. अध्यापक ....

पूर्णांक—80

मॉडल पेपर-5 (अभ्यासार्थ)

उच्च माध्यमिक परीक्षा, कक्षा 12

विषय : गणित

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक-साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
6. प्रश्न क्रमांक 16 से 22 में आन्तरिक विकल्प है।

खण्ड-अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न—

(i) मान लीजिए कि $f : R \to R, f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित है। सही विकल्प का चयन कीजिए— 1

(अ) f एकैकी फलन है (ब) f एकैकी आच्छादक फलन है
(स) f एकैकी आच्छादक फलन है (द) f न एकैकी है और न ही आच्छादक है

(ii) यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, तो x का मान बराबर है— 1

(अ) $0, \frac{1}{2}$ (ब) $1, \frac{1}{2}$ (स) 0 (द) $\frac{1}{2}$

(iii) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो $A + A' = I$, यदि α का मान है— 1

(अ) $\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{3}$ (स) π (द) $\frac{3\pi}{2}$

(iv) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$ हो तो— 1

(अ) $\det(A) = 0$ (ब) $\det A \in (2, \infty)$
(स) $\det(A) \in (2, 4)$ (द) $\det(A) \in [2, 4]$

(v) यदि $y = \log x$ तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ है— 1

(अ) $-\frac{1}{x^2}$ (ब) $\frac{1}{x^2}$ (स) $\frac{1}{x}$ (द) $-\frac{1}{x}$

(vi) एक वृत्त की त्रिज्या $r = 3$ सेमी पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है— 1
(अ) 2π सेमी²/सेमी (ब) 6π सेमी²/सेमी (स) 3π सेमी²/सेमी (द) 4π सेमी²/सेमी

(vii) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$ बराबर है— 1

(अ) $-\cot(e.x^x) + C$ (ब) $\tan(xe^x) + C$
(स) $\tan(e^x) + C$ (द) $\cot(e^x) + C$

(viii) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ की घात है— 1

(अ) 3 (ब) 2 (स) 1 (द) परिभाषित नहीं है

(ix) $\hat{i}.(\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j}.(\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k}.(\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है— 1

(अ) 0 (ब) −1 (स) 1 (द) 3

(x) यदि एक रेखा के दिक्‌अनुपात −18, 12, −4 है तो इसके दिक्‌कोसाइन हैं— 1

(अ) $-\frac{9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$ (ब) −9, 6, −2 (स) $-\frac{8}{11}, \frac{12}{11}, \frac{-4}{11}$ (द) $-\frac{9}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{-2}{11}$

(xi) रेखाओं $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के मध्य कोण है— 1

(अ) 0° (ब) 60° (स) 90° (द) 30°

(xii) वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2, x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है— 1

(अ) -9 (ब) $-\frac{15}{4}$ (स) $\frac{15}{4}$ (द) $\frac{17}{4}$

(xiii) वक्र $y = \sin x$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा— 1

जब $0 \le x \le \pi$

(अ) 1 वर्ग इकाई (ब) 0 वर्ग इकाई (स) 2 वर्ग इकाई (द) -1 वर्ग इकाई

(xiv) यदि $P(A) = \frac{7}{13}, P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ तो P(A/B) का मान है— 1

(अ) $\frac{4}{9}$ (ब) $\frac{9}{4}$ (स) $\frac{7}{9}$ (द) $\frac{4}{7}$

(xv) A और B इस प्रकार घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0$, A, B का उपसमुच्चय है तब P(B/A) का मान है— 1

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{2}$ (स) 1 (द) $\frac{1}{3}$

उत्तर—

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)	(xiii)	(xiv)	(xv)

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

(i) $\tan^{-1}(-1)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(ii) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(iii) $\sin^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)$ का मान .... है। 1

हल— ....

(iv) यदि $2x + 3y = \sin y$ तो $\frac{dy}{dx} =$ 1

हल— ....

(v) यदि $f(x) = (2x-1)^2 + 3$ तो $f(x)$ का निम्नतम मान .... है। 1

हल— ....

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का समाकल गुणांक .... है। 1

हल— ....

(vii) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच कोण .... है। 1

हल— ....

3. अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न—

(i) सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(ii) यदि $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ तब x का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(iii) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान है। 1

हल— ....

(iv) फलन $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2$ का अन्तराल $\left[-2, \frac{9}{2}\right]$ में निरपेक्ष उच्चतम मान ज्ञात कीजिए। 1

हल— ....

(v) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(vi) $\int x^2 \log x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(vii) प्रदर्शित कीजिए कि $xy = \log y + C$ अवकल समीकरण $y' = \frac{y^2}{1-xy}$ का व्यापक हल है। 1

हल—

(viii) यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है और $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$, तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए। 1

हल—

(ix) λ और μ ज्ञात कीजिए यदि – $(2\hat{i}+6\hat{j}+27\hat{k})\times(\hat{i}+\lambda\hat{j}+\mu\hat{k}) = \vec{0}$ 1

हल—

(x) मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}$ और $\vec{b} = 2\hat{i}+\hat{j}$ तब क्या $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ है? क्या सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान हैं? 1

हल—

खण्ड-ब

लघूत्तरीय प्रश्न—

4. सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है} द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है। 2

हल—

5. यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हैं तो $(A + 2B)'$ ज्ञात कीजिए। 2

हल—

6. एक 2 × 2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$ द्वारा प्रदत्त हों। 2

हल—

7. सिद्ध कीजिए कि सारणिक $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ से स्वतन्त्र है। 2

हल—

10. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$, $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ तब $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

11. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f, वर्धमान या ह्रासमान है। 2

हल—

8. क्या $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x-5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन, एक संतत फलन है? 2

हल—

9. $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्य की जाँच कीजिए। 2

हल—

12. $\int \frac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

हल—

13. समाकलन का प्रयोग कर दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2

हल—

14. दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ के लिए सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 2

हल—

खण्ड-स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न—

16. $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

$\int x\cos^{-1}x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

हल—

15. मान लें A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{12}$ और P(A- नहीं और B-नहीं) $= \frac{1}{4}$, क्या A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं? 2

हल—

17. अवकल समीकरण $xy\dfrac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ के लिए बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाला व...

ज्ञात कीजिए।

अथवा

अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2\cot x \ (x \neq 0)$$

का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि

$y = 0$ यदि $x = \dfrac{\pi}{2}$

हल—

18. रेखाओं $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

निम्नलिखित रेखा युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए—

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4} \text{ और } \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$$ 3

हल—

19. मान लीजिए किसी रोगी को दिल का दौरा पड़ने का संयोग 40% है। यह मान लिया जाता है कि ध्यान और योग विधि दिल का दौरा पड़ने के खतरे को 30% कम कर देता है और दवा द्वारा खतरे को 25% कम किया जा सकता है। किसी भी समय रोगी इन दोनों में से किसी एक विकल्प का चयन करता है। यह दिया गया है कि उपरोक्त विकल्पों से किसी एक का चुनाव करने वाले रोगियों से यादृच्छया चुना गया रोगी दिल के दौरे से ग्रस्त हो जाता है। रोगी द्वारा ध्यान और योग विधि का उपयोग किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

अथवा

52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं, जो ईंट के पत्ते हैं। खो गए पत्ते की ईंट होने की प्रायिकता क्या है?

हल—

खण्ड-द

निबन्धात्मक प्रश्न—

20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16 \sin 2x} dx$ का मान ज्ञात करो। 4

अथवा

$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} dx$ का मान ज्ञात करो। 4

हल—

21. रेखाओं $x+1=2y=-12z$ और $x=y+2=6z-6$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

अथवा

बिन्दु $P(2,-1,3)$ से गुजरने वाली और रेखाओं $\vec{r}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+\lambda(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ तथा $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+\mu(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$ के लाम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

हल—

22. आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z = -50x + 20y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत ज्ञात कीजिए : 4

$$2x - y \geq -8 \quad \ldots(1)$$
$$3x + y \geq 3 \quad \ldots(2)$$
$$2x - 3y \leq 12 \quad \ldots(3)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots(4)$$

अथवा

निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए— 6

$2x + y \geq 3, x + 2y \geq 6, x \geq 0, y \geq 0$

हल—

दिनांक .... प्राप्तांक .... ह. अध्यापक ....

पूर्णांक—60

मॉडल पेपर-6 (अभ्यासार्थ)

उच्च माध्यमिक परीक्षा, कक्षा 12

विषय : गणित

समय : 3 घण्टे 15 मिनट पूर्णांक : 60

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक-साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
6. प्रश्न क्रमांक 16 से 22 में आन्तरिक विकल्प है।

खण्ड-अ

1. **बहुविकल्पीय प्रश्न—**

(i) मान लीजिए कि $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है। सही विकल्प का चयन कीजिए— 1

(अ) f एकैकी फलन है। (ब) f आच्छादक फलन है।
(स) f एकैकी आच्छादक फलन है। (द) f न एकैकी है न ही आच्छादक है।

(ii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$ का मान है— 1

(अ) $\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{13\pi}{6}$ (स) $-\frac{\pi}{6}$ (द) $\frac{7\pi}{6}$

(iii) यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB – BA एक—

(अ) विषम सममित आव्यूह है। (ब) सममित आव्यूह है।

(स) शून्य आव्यूह है। (द) तत्समक आव्यूह है।

(iv) यदि x, y, z शून्येतर संख्याएँ हों तो आव्यूह $A=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है—

(अ) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (ब) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(स) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (द) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) फलन $\log_7(\log x)$ का अवकलज है— 1

(अ) $\frac{1}{x\log_7 x}$ (ब) $\frac{1}{\log 7 \log x}$ (स) $\frac{1}{x\log 7 \log x}$ (द) $\frac{x}{\log 7 \log x}$

(vi) एक वृत्त की त्रिज्या $r = 4$ सेमी पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है— 1

(अ) 6π सेमी²/सेमी (ब) 8π सेमी² (स) 8π सेमी²/सेमी (द) 6π सेमी

(vii) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ बराबर है— 1

(अ) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (ब) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

(स) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (द) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$

(viii) अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0$ की कोटि है— 1

(अ) 2 (ब) 1 (स) 0 (द) परिभाषित नहीं है।

(ix) यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो $\vec{a}.\vec{b} \ge 0$ होगा, यदि— 1

(अ) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ (ब) $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ (स) $0<\theta<\pi$ (द) $0\le\theta\le\pi$

(x) एक रेखा अक्षों से बराबर कोण बनाती है तो रेखा की दिक्-कोसाइन है— 1

(अ) $\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ब) $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(स) $\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (द) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

(xi) दो रेखाओं के दिक्‌अनुपात a, b, c और $b-c, c-a, a-b$ हैं तब इनके मध्य कोण है— 1

(अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) $\frac{\pi}{4}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{6}$

(xii) वक्र $x=0$ एवं $x=2\pi$ तथा वक्र $y=\sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है— 1

(अ) 2 वर्ग इकाई (ब) 4 वर्ग इकाई (स) 3 वर्ग इकाई (द) 1 वर्ग इकाई

(xiii) परवलय $y=\sin^2 x$ रेखाओं $x=\frac{\pi}{2}, x=\pi$ और x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है— 1

(अ) $\frac{\pi}{2}$ वर्ग इकाई (ब) $\frac{\pi}{4}$ वर्ग इकाई (स) $\frac{\pi}{8}$ वर्ग इकाई (द) π वर्ग इकाई

(xiv) A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ दी गई हैं, जहाँ $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ तथा $P(B)=p$, तब p का मान होगा— 1

(अ) $\frac{5}{6}$ (ब) $\frac{6}{10}$ (स) $\frac{1}{2}$ (द) $\frac{1}{10}$

(xv) $P(B)=0.5$ तथा $P(A\cap B)=0.32$ तब $P(A/B)$ का मान होगा— 1

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{16}{25}$ (स) $\frac{1}{25}$ (द) $\frac{1}{16}$

उत्तर—

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)	(xiii)	(xiv)	(xv)

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

(i) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\cot^{-1}(\sqrt{3})$ का मान .... है। 1

हल— ....

(ii) यदि $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\theta$ तो $\sin\theta$ का मान .... है। 1

हल— ....

(iii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{9\pi}{8}\right)$ का मुख्य मान .... है। 1

हल— ....

(iv) यदि $y=e^{x^3}$ तो $\frac{dy}{dx}=$ 1

हल— ....

(v) यदि $f(x)=|x+2|-1$ तो $f(x)$ का निम्नतम मान .... है। 1

हल— ....

(iv) फलन $y = f(x)$ के लिए यदि $\frac{dy}{dx} = 6(x-2)(x-3)$ है, तो y के अधिकतम मान के लिए x का मान ज्ञात कीजिए। **1**

हल—

(v) $\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

हल—

(vi) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

हल—

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\sec^2 x = \tan x \sec^2 x$ का समाकल गुणांक .... है।

हल— ....

(vii) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप .... है।

हल— ....

3. अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न—

(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, 0), (6, 0), (4, 3) हैं।

हल— ....

(ii) यदि $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5$ तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

हल— ....

(iii) सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में वर्धमान फलन है।

हल— ....

गणित—कक्षा 12
संजीव डेस्क वर्क का सम्पूर्ण हल

मॉडल पेपर-2

खण्ड-अ

हल 1.

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
(द)	(ब)	(द)	(द)	(स)	(द)
(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)
(स)	(द)	(स)	(अ)	(ब)	(द)
(xiii)	(xiv)	(xv)			
(अ)	(द)	(स)			

हल 2. (i) $-\frac{\pi}{6}$ (ii) 0 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$

(v) 3 (vi) e^{2x} (vii) $\sqrt{62}$

हल 3. (i) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x(x)-(x+1)(x-1)$

$$= x^2-(x^2-1)$$

$$= x^2-x^2+1=1 \text{ उत्तर}$$

(ii) adj A $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ का परिवर्त

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ उत्तर}$$

(iii) $f'(x)=2x-4=2(x-2)$

$f(x)$ वर्धमान है, इसके लिए $f'(x)>0$

$\Rightarrow \quad 2(x-2)>0$

$\Rightarrow \quad x>2$

अभीष्ट अन्तराल = $(2,\infty)$ उत्तर

$...0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$

सीमान्त मूल्य (Marginal Value) = $C'(x) = MC$

$$MC = \frac{d}{dx}C(x)$$

$$= \frac{d}{dx}(0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000)$$

$$= 0.021x^2 - 0.006x + 15$$

अब $x = 17$ वस्तु

$$\therefore \quad MC = 0.021 \times 17^2 - 0.006 \times 17 + 15$$

$$= 6.069 - 0.102 + 15 = 20.967$$

$\therefore$ सीमान्त मूल्य = 20.967 रु. उत्तर

(v) $$\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}dx = \int \frac{x^2(x-1) + x - 1}{x - 1}dx$$

$$= \int \frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}dx$$

$$= \int (x^2 + 1)\,dx$$

$$= \int x^2\,dx + \int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x + C \text{ उत्तर}$$

(vi) $I = \int e^x(\sin x + \cos x)\,dx$

यदि $f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$

तब $$I = \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + C$$

$$= \int e^x \sin x + C \text{ उत्तर}$$

(vii) तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या 0 है।

(viii) दिया है,

$$\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} \quad \therefore |\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

सदिश $\vec{a}$ का मात्रक सदिश

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\hat{i} - 2\hat{j}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j} \text{ है।}$$

इसलिए सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश 7 परिमाण वाला सदिश

$= 7\hat{a}$ होगा

$$= 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j} \text{ है।}$$

(ix) $\vec{a} = \vec{b} \quad \Rightarrow x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$

$\Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1$ उत्तर

(x) हम जानते हैं कि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच यदि θ कोण हो तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

यहाँ $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{6}, |\vec{a}| = \sqrt{3}$ तथा $|\vec{b}| = 2$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})(2)} = \frac{(\sqrt{3})(\sqrt{2})}{(\sqrt{3})\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ उत्तर}$$

खण्ड-ब

हल 4. R एक तुल्यता सम्बन्ध सिद्ध करने के लिए हमें स्वतुल्य, सममित और संक्रामक सम्बन्ध सिद्ध करना होगा।

(i) **स्वतुल्य** सम्बन्ध R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के सर्वांगसम होता है। अतः $(T_1, T_1) \in R \ \forall \ T_1 \in T$

(ii) **सममित** $(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ के सर्वांगसम है।

$\Rightarrow$ T_2, T_1 के सर्वांगसम है।

$\Rightarrow$ $(T_2, T_1) \in R, \forall T_1, T_2 \in T$

अतः सम्बन्ध R सममित है।

(iii) **संक्रामक** $(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ के सर्वांगसम है।

$(T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_2, T_3$ के सर्वांगसम है।

$\Rightarrow$ T_1, T_3 के सर्वांगसम है।

$\Rightarrow$ $(T_1, T_3) \in R, \forall \ T_1, T_2, T_3 \in T$

अतः सम्बन्ध R संक्रामक है।

चूँकि R, स्वतुल्य, सममित एवं संक्रामक है, इसलिए R तुल्यता सम्बन्ध है।

हल 5. हमें दिया है

$$2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

पहले समीकरण से

$$2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-3 & 0-2 \\ -3-1 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

अत: $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ उत्तर

हल 6.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a-a & b-b \\ -a+a & 0 & c-c \\ -b+b & -c+c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= O$ उत्तर

हल 7. माना कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -(-2) = 2,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2$

$$\therefore \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व होगा।

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ उत्तर}$$

हल 8. प्रश्नानुसार $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{यदि } x \le 2 \\ 3, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$

$x = 2$ पर, L.H.L. $= \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (kx^2) = 4k$

R.H.L. $= \lim_{x \to 2} f(x) = 3$

$f(2) = k.4 = 4k$

फलन f सतत है यदि LHL = RLH = $f(2)$

$$\therefore \quad 4k = 3, \quad \therefore k = \frac{3}{4} \text{ उत्तर}$$

हल 9. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ x, & \text{यदि } x \ge 0 \end{cases}$

हम जानते हैं कि $f(x)$, $x = 0$ पर संतत है।

माना $c \in R$ तथा $c < 0$ तब $f(c) = -c$

साथ ही $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c = f(c)$

इसलिए f सभी ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

माना $c \in R$ तथा $c > 0$ तब भी $f(c) = c$

साथ ही $\lim_{x \to c} f(c) = \lim_{x \to c} x = c = f(c)$

इसलिए f सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

चूँकि f, सभी बिन्दुओं पर संतत है, अत: यह एक संतत फलन है।

हल 10. प्रश्नानुसार $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

$x = \tan\theta$ रखने पर

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \cos^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right] = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x$$

अब x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2}$ उत्तर

हल 11.

$f(x) = 2x^2 - 3x$

$\therefore \quad f'(x) = 4x - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ बिन्दु $x = \frac{3}{4}$ वास्तविक संख्या रेखा को दो भागों में विभाजित करता है। यह भाग (अन्तराल) है $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ और $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$

अन्तराल $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ में $f(x) = +ve$

$\therefore$ f वर्धमान फलन है। उत्तर

हल 12. माना $\quad I = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}dx = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\tan x}\sec^2 x\, dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx$$

यहाँ $\tan x = t$ रखने पर, $\therefore \sec^2 x\, dx = dt$

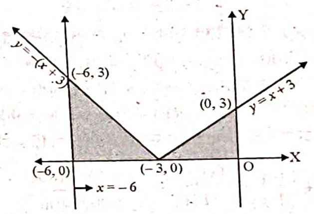
$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\tan x} + C \text{ उत्तर}$$

हल 13. प्रश्नानुसार $y = |x+3|$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	3	2	1	0	1	2	3

इसका आलेख आकृति के अनुसार है।



$$\therefore \int_{-6}^{0}|x+3|\,dx = \int_{-6}^{-3}|x+3|\,dx + \int_{-3}^{0}|x+3|\,dx$$

$$= \int_{-6}^{-3} -(x+3)\,dx + \int_{-3}^{0}(x+3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-6}^{-3} + \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{0}$$

$$= -\left[\frac{9}{2}-9-18+18\right] + \left[0+0-\frac{9}{2}+9\right]$$

$$= -\frac{9}{2}+9-\frac{9}{2}+9$$

$$= \frac{9}{2}+\frac{9}{2} = 9 \text{ वर्ग इकाई उत्तर}$$

हल 14.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}$$

अब $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a} = (-\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}).(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})$

$= (-1)(3)+(7)(-1)+(5)(2)$

$= -3-7+10 = 10-10 = 0$

इसलिए $(\vec{a}\times\vec{b})$ से निरूपित सदिश, $\vec{a}$ के लम्बवत् है।

पुनः $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b} = (-\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}).(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

$= (-1)(2)+(7)(1)+(5)(-1)$

$= -2+7-5 = 7-7 = 0$

इसलिये $(\vec{a}\times\vec{b})$ से निरूपित सदिश, $\vec{b}$ के भी लम्बवत् है।

हल 15. कुल प्रश्न $= 300+200+500+400 = 1400$

माना कि E : 'आसान प्रश्न' $\Rightarrow n(E) = 300+500 = 800$

F : 'बहु-विकल्पीय प्रश्न' $\Rightarrow n(F) = 500+400 = 900$

$\therefore$ $E\cap F$: 'आसान बहु-विकल्पीय प्रश्न' $\Rightarrow n(E\cap F) = 500$

अब $P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{500/1400}{900/1400}$

$= \frac{5}{9}$ उत्तर

खण्ड-स

हल 16. माना कि

$$I = \int\sqrt{1-4x^2}\,dx = 2\int\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx$$

यहाँ $a^2 = \frac{1}{4}$

$$\left[\because \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$\therefore \quad I = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}+\frac{1}{4.2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)\right]+C$$

$$= x\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2}+\frac{1}{4}\sin^{-1}2x+C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}\sin^{-1}2x+C$$

$$I = \frac{1}{4}\sin^{-1}2x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+C \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल— माना कि $I = \int_1^2 e^{2x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)dx$

$$= \int_1^2\left(e^{2x}.\frac{1}{x}-e^{2x}.\frac{1}{2x^2}\right)dx$$

$$= \int_1^2\frac{e^{2x}}{x}dx-\int_1^2\frac{e^{2x}}{2x^2}dx \quad \text{.... (1)}$$

$$I = I_1 - I_2$$

अब $I_1 = \int_1^2\frac{e^{2x}}{x}dx$

ILATE के अनुसार $\frac{1}{x}$ को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I_1 = \left[\frac{1}{x}.\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2-\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}\right).\frac{e^{2x}}{2}dx$$

$$= \left(\frac{e^4}{4}-\frac{e^2}{2}\right)+\int_1^2\frac{e^{2x}}{2x^2}dx$$

$$= \frac{e^2}{4}(e^2-2)+I_2$$

I_1 का मान (1) में रखने पर

$$I = I_1 - I_2$$

$$= \frac{e^2}{4}(e^2-2)+I_2-I_2$$

$$I = \frac{e^2}{4}(e^2-2) \text{ उत्तर}$$

हल 17. प्रश्नानुसार स्पर्श रेखा की प्रवणता = निर्देशांकों का योग

$$\frac{dy}{dx} = x + y \text{ या } \frac{dy}{dx} - y = x$$ जो कि एक रैखिक अवकल समीकरण है

अतः $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से तुलना करने पर यहाँ $P = -1$ तथा $Q = x$

$\therefore$ $$\int P\,dx = \int(-1)\,dx = -x$$

अतः $$I.F. = e^{-x}$$

$\therefore$ अवकल समीकरण का हल

$$y \times I.F. = \int Q \times I.F.\,dx + C$$

या $$y\,e^{-x} = \int \underset{I}{x}\,\underset{II}{e^{-x}}\,dx + C$$

खण्डशः समाकलन करने पर

$$y\,e^{-x} = x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int 1.\frac{e^{-x}}{-1}\,dx + C$$

$$= -x\,e^{-x} + \int e^{-x}dx + C$$

$$y\,e^{-x} = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C$$

अब $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 = 0 - 1 + C \therefore C = 1$

अतः अभीष्ट हल

$$y\,e^{-x} = -x\,e^{-x} - e^{-x} + 1$$

या $$y = -x - 1 + e^x \text{ या } y + x + 1 = e^x$$ उत्तर

अथवा का हल

हल— माना कि मूलधन P रु. है। ब्याज की दर 5% वार्षिक है।

अतः प्रश्नानुसार

$$\frac{dP}{dt} = \frac{5}{100}P$$

$\therefore$ $$\frac{dP}{P} = 0.05\,dt$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int\frac{dP}{P} = \int 0.05\,dt$$

$$\log P = 0.05t + \log C$$

या $$\log P - \log C = 0.05t$$

या $$\log\frac{P}{C} = 0.05t$$

$$\frac{P}{C} = e^{0.05t}$$

$\therefore$ $$P = Ce^{0.05t} \quad ...(1)$$

$\Rightarrow$ जब $t = 0$ तथा $P = 1000$ तो (i) से

$$1000 = Ce^0 \quad \therefore C = 1000$$

$\therefore$ $$P = 1000 \times e^{0.05t}$$

$\therefore$ (i) से

जब $t = 10$ वर्ष, $$P = 1000 \times e^{0.05 \times 10}$$

$$= 1000 \times e^{0.5}$$

$$= 1000 \times 1.648 = 1648$$

अर्थात् 10 वर्षों में 100 रु. 1648 रु. हो जाएँगे। उत्तर

हल 18. हम जानते हैं कि रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ की बीच न्यूनतम दूरी

$$d = \left|\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1).(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \quad ....(1)$$

रेखा $$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$ में

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \text{ तथा } \vec{b}_1 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

तथा रेखा $$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$ में

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \text{ एवं } \vec{b}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

$\therefore$ $$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k} \quad ....(2)$$

तथा $$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2 - 1)\hat{i} - (2 - 2)\hat{j} + (1 + 2)\hat{k}$$

$$= -3\hat{i} + 3\hat{k} \quad ....(3)$$

अतः $$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad ....(4)$$

समी. (2), (3) व (4) का मान (1) में रखने पर

$$d = \left|\frac{(\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}).(-3\hat{i}+3\hat{k})}{3\sqrt{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{1\times(-3)+(-3)\times 0+(-2)\times 3}{3\sqrt{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-3-0-6}{3\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{-9}{3\sqrt{2}}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल— माना कि अभीष्ट रेखा

$$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}) \quad ....(1)$$

रेखाएँ $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ और

$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$ आपस में लम्ब हैं।

अत: इन रेखाओं के दिक्-अनुपात 3, – 16, 7 और b_1, b_2, b_3 हैं। ये रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$3b_1 - 16b_2 + 7b_3 = 0 \quad ....(2)$$

इसी प्रकार रेखा $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ और $\vec{r}$ $=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$ के दिक्-अनुपात 3, 8, – 5 और b_1, b_2, b_3 हैं। ये परस्पर लम्बवत् होंगी यदि

$$3b_1 + 8b_2 - 5b_3 = 0 \quad ....(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) को लिखने पर

$$3b_1 - 16b_2 + 7b_3 = 0$$
$$3b_1 + 8b_2 - 5b_3 = 0$$

$$\frac{b_1}{80-56} = \frac{-b_2}{-15-21} = \frac{b_3}{24+48}$$

या $$\frac{b_1}{24} = \frac{b_2}{36} = \frac{b_3}{72}$$

या $$\frac{b_1}{2} = \frac{b_2}{3} = \frac{b_3}{6}$$

b_1, b_2, b_3 का समानुपाती मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है। उत्तर

हल 19. माना थैले I का चयन E_1 से और थैले II का चयन E_2 से किया जाता है और माना लाल गेंद निकालने की घटना को A से निरूपित किया जाये तब

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

और साथ ही

$P(A|E_1) = P$ (थैले I में से लाल रंग की गेंद निकालना) $= \frac{3}{7}$

चूँकि थैले I में कुल गेंद

$= 3 + 4 = 7$ हैं।

और लाल गेंदों की संख्या

$= 3$ है।

इसी तरह से

$P(A|E_2) = P$ (थैले II में से लाल रंग की गेंद निकालना) $= \frac{5}{11}$

चूँकि थैले II में कुल गेंद $= 5 + 6 = 11$

और लाल गेंदों की संख्या $= 5$ है।

अब थैले II में से गेंद निकालने की प्रायिकता, जब कि यह ज्ञात है कि वह लाल रंग की है $= P(E_2|A)$, बेज़ प्रमेय द्वारा

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68} \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल—प्रश्नानुसार पुरुषों की संख्या समान है।

घटना E_1 = पुरुष का होना,

E_2 = महिला का होना

A : सफेद बाल का होना

$\therefore \quad P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{2}$

$P(A/E_1) = 5\% = 0.05,\ P(A/E_2) = 0.25\% = 0.0025$

अत: बेज़ प्रमेय से

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)\,P(A/E_1)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05 + \frac{1}{2}\times 0.0025}$$

अंश व हर को 2 × 10000 से गुणा करने पर

$$P(E_1/A) = \frac{500}{500+25} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21} \text{ उत्तर}$$

खण्ड-द

हल 20. मान लीजिये कि

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx \quad \text{....(1)}$$

तब गुणधर्म $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ से

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx \quad \text{....(2)}$$

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\log \sin x + \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\ (\sin x + \cos x)\, dx$$

2 का गुणा, 2 का भाग देने पर

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{2\sin x \cos x}{2}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2x}{2}\, dx$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \log 2\, dx}_{I_2}$$

प्रथम समाकलन में $2x = t$ रखने पर

$2dx = dt$ जब $x = 0$ तो $t = 0$

और जब $x = \frac{\pi}{2}$ तो $t = \pi$

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \log 2 \int_0^{\pi/2} dx$$

$$2I = \frac{2}{2}\int_0^{\pi/2} \log \sin t\, dt - \log 2 [x]_0^{\pi/2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$2I - I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

अत: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$ उत्तर

अथवा का हल

हल—माना $I = \int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$

$$= \int \frac{\sec^4 x}{1+\tan^4 x} dx = \int \frac{\sec^2 x\ .\ \sec^2 x}{1+(\tan^2 x)^2} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,(1+\tan^2 x)}{1+(\tan^2 x)^2} dx$$

$\tan x = t$ रखने पर $\sec^2 x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

$$= \int \frac{1+1/t^2}{t^2+1/t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1+1/t^2}{t^2+1/t^2-2+2}\,dt$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dt$$

पुनः $t-\frac{1}{t}=u$ रखने पर $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=du$

तब $\quad I = \int \frac{du}{(u)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right)+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan^2 x-1}{\sqrt{2}\tan x}\right)+C \text{ उत्तर}$$

हल 21. हम जानते हैं कि रेखाओं

$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ और

$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left|\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}\right| \quad \ldots(1)$$

यहाँ पर $x_1=-1, y_1=-1, z_1=-1$ तथा $x_2=3, y_2=5, z_2=7$

और $a_1=7, b_1=-6, c_1=1$ तथा $a_2=1, b_2=-2, c_2=1$

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+1 & 5+1 & 7+1 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-6+2)-6(7-1)+8(-14+6)$$

$$= -16-36-64$$

$$= -52-64 = -116$$

तथा $\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2}$

$$= \sqrt{(-6+2)^2+(1-7)^2+(-14+6)^2}$$

$$= \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116}$$

समी. (1) में मान रखने पर

$$d = \left|\frac{-116}{\sqrt{116}}\right| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ इकाई उत्तर}$$

अथवा का हल

हल—माना दिया हुआ बिन्दु A है उसका स्थिति सदिश $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ है। सरल रेखा, सदिश $\vec{b}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के समान्तर है, अतः सरल रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$$

जहाँ λ कोई वास्तविक संख्या है।

या $\quad \vec{r} = (2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})+\lambda(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}) \quad \ldots(1)$

यह अभीष्ट सरल रेखा का सदिश समीकरण है।

कार्तीय रूप में रेखा का समीकरण

माना $\quad \vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

समीकरण (1) से

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = (2+\lambda)\hat{i}+(\lambda-1)\hat{j}+(4-2\lambda)\hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के गुणांकों की तुलना दोनों तरफ करने पर

$$x = 2 + \lambda, y = \lambda - 1, z = 4 - 2\lambda$$

या $$\frac{x-2}{1} = \lambda, \frac{y+1}{1} = \lambda, \frac{z-4}{-2} = \lambda$$

λ का विलोप करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}$$

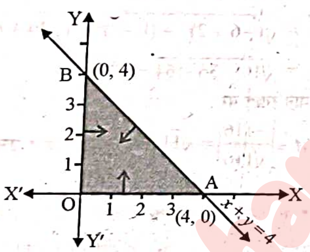
जो कि सरल रेखा का कार्तीय रूप है।

हल 22. प्रश्नानुसार उद्देश्य फलन $Z = 3x + 4y$

तथा अवरोध हैं $x + y \leq 4, x, y \geq 0$

(i) $x + y \leq 4$ का आरेख

रेखा $x + y = 4$, बिन्दु A(4, 0) और B(0, 4) से होकर जाती है।



दिए गए समीकरण $x + y \leq 4$ को समीकरण में बदलने पर प्राप्त $x = 0$, $y = 0$ को रखने पर $0 \leq 4$ जो सत्य है।

$\therefore$ मूल विन्दु इस क्षेत्र में स्थित है।

$\Rightarrow x + y \leq 4$ के क्षेत्र रेखा $x + y = 4$ और इसके नीचे मूल बिन्दु की ओर है।

(ii) $x \geq 0$, का क्षेत्र y-अक्ष की दायीं ओर y-अक्ष है।

(iii) $y \geq 0$, क्षेत्र के विन्दु x-अक्ष पर है और x-अक्ष के ऊपर है, इनसे बना उभयनिष्ठ क्षेत्र ΔOAB है।

अर्थात् कोनीय विन्दु O(0, 0), A(4, 0) तथा B(0, 4)।

अव इन कोनीय विन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय विन्दु	Z के संगत मान $Z = 3x + 4y$
O(0, 0)	$Z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$
A(4, 0)	$Z = 3 \times 4 + 4 \times 0 = 12$
B(0, 4)	$Z = 3 \times 0 + 4 \times 4 = 16 \leftarrow$ अधिकतम

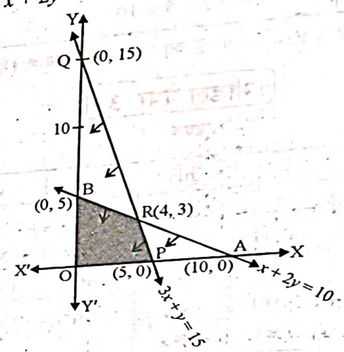
अत: Z अधिकतम B(0, 4) पर है तथा अधिकतम मान = 16; अत: इष्टतम हल $x = 0, y = 4$ उत्तर

अथवा का हल

हल— प्रश्नानुसार $Z = 3x + 2y$, अवरोध $x + 2y \leq 10, 3x + y \leq 15, x, y \geq 0$

(i) **$x + 2y \leq 10$ का क्षेत्र—**

रेखा $x + 2y = 10$ बिन्दु A(10, 0) और B(0, 5) से गुजरती है।



$\therefore x + 2y = 10$ का आरेख रेखा AB है।

$x + 2y \leq 10$ में $x = 0, y = 0$ रखने से $0 \leq 10$ जो सत्य है।

अर्थात् $x + 2y \leq 10$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा AB पर और AB के नीचे हैं।

(ii) **$3x + y \leq 15$ का क्षेत्र—**

रेखा $3x + y = 15$ बिन्दु P(5, 0) और Q(0, 15) से होकर जाती है।

$\therefore 3x + y = 15$ का आरेख PQ है।

$3x + y \leq 15$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \leq 15$ जो सत्य है।

अर्थात् $3x + y \leq 15$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा PQ पर और PQ के नीचे हैं।

(iii) $x \geq 0$, क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और इसके दायीं ओर हैं।

(iv) $y \geq 0$, क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और इसके ऊपर हैं।

समस्या का सुसंगत क्षेत्र OBRP है जबकि R बिन्दु AB और PQ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।

$AB = x - 2y = 10$; $PQ = 3x + y = 15$ को हल करने पर बिन्दु P(4, 3) प्राप्त होता है।

अर्थात् कोनीय बिन्दु हैं O(0, 0), P(5, 0), R(4, 3) तथा B(0, 5)। अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = 3x + 2y$
O(0, 0)	$Z = 3 \times 0 + 2 \times 0 = 0$
P(5, 0)	$Z = 3 \times 5 + 2 \times 0 = 15$
R(4, 3)	$Z = 3 \times 4 + 2 \times 3 = 18 \leftarrow$ अधिकतम
B(0, 5)	$Z = 3 \times 0 + 2 \times 5 = 10$

अतः कोनीय बिन्दु R(4, 3) पर Z का अधिकतम मान = 18 उत्तर

मॉडल पेपर-3

खण्ड-अ

हल 1.

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
(अ)	(ब)	(ब)	(ब)	(द)	(स)
(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)
(द)	(स)	(द)	(अ)	(ब)	(अ)
(xiii)	(xiv)	(xv)			
(द)	(ब)	(ब)			

हल 2. (i) $\frac{2\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 1

(v) 10 (vi) e^{3x} (vii) $-4\hat{j} - \hat{k}$

हल—3. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\sin^2\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ उत्तर

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow 3 - 3x = -3 - x$

$\Rightarrow 3 + 3 = 3x - x$

$\Rightarrow 6 = 2x \quad \Rightarrow x = 3$ उत्तर

(iii) $f(x) = 3x + 17$

$\Rightarrow f'(x) = 3 > 0$

अर्थात् f, R पर वर्धमान है।

(iv) सीमान्त आय $MR = \frac{dR}{dx}$

$= \frac{d}{dx}(3x^2 + 36x + 5)$

$= 3\frac{d}{dx}(x^2) + 36\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$

$= 3 \times 2x + 36 \times 1 + 0$

$= 6x + 36$

जब $x = 5$ है तब

$MR = 6(5) + 36 = 30 + 36 = 66$

(v) माना

$I = \int x\sqrt{x+2}\,dx = \int (x + 2 - 2)\int x\sqrt{x+2}\,dx$

$= \int (x+2)^{\frac{3}{2}} dx - 2\int \sqrt{x+2}\,dx$

$= \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 2\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$ उत्तर

(vi) माना $I = \int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

यदि $f(x) = \frac{1}{x}$ तब $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\therefore \quad I = \int e^x[f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x) + C$

$= e^x \frac{1}{x} + C$ उत्तर

(vii) दिया गया फलन $y = x^2 + 2x + C$

तथा अवकल समीकरण $y' = -2x - 2 = 0$

$y = x^2 + 2x + C$ का अवकल करने पर

$y' = 2x + 2$

या $\quad y' - 2x - 2 = 0$

अत: $\quad y = x^2 + 2x + C \quad$ अवकल समीकरण

$y' - 2x - 2 = 0$ का हल है। उत्तर

(viii) हम जानते हैं कि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच यदि θ कोण हो तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}).(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})}{|\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}||3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}|}$$

$$= \frac{1.3+(-2)(-2)+3.1}{\sqrt{1^2+(-2)+3^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}$$

$$= \frac{3+4+3}{\sqrt{1+4+9}.\sqrt{9+4+1}} = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{5}{7}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) \text{ उत्तर}$$

(ix) हम पाते हैं कि

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$$

$$= \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}.\vec{b}) + |\vec{b}|^2 \quad [\because \vec{b}.\vec{a} = \vec{a}.\vec{b}]$$

मान रखने पर

$$= (2)^2 - 2(4) + (3)^2 = 4 - 8 + 9 = 5$$

इसलिए $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$

(x) प्रश्नानुसार $\quad \vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -7 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-14+14) - \hat{j}(2-21) + \hat{k}(-2+21)$$

$$= 0\hat{i} + 19\hat{j} + 19\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{19^2+19^2} = 19\sqrt{2} \text{ उत्तर}$$

खण्ड-ब

हल 4. A = एक समतल में त्रिभुजों का समुच्चय

$R = (T_1, T_2)$: T_1 और T_2 सर्वांगसम त्रिभुज हैं।

R स्वतुल्य है क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज अपने सर्वांगसम है।

R सममित है क्योंकि यदि त्रिभुज T_1 त्रिभुज T_2 के सर्वांगसम है तो त्रिभुज T_2 त्रिभुज T_1 के भी सर्वांगसम है।

R संक्रामक है क्योंकि यदि त्रिभुज T_1, T_2 और त्रिभुज T_2, T_3 सर्वांगसम हैं तो त्रिभुज T_1, T_3 भी सर्वांगसम हैं।

$\Rightarrow$ R तुल्यता सम्बन्ध है।

हल 5. $\quad A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$$\therefore A'A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\sin\alpha)(\sin\alpha)+(-\cos\alpha)(-\cos\alpha) & (\sin\alpha)(\cos\alpha)-\cos\alpha\sin\alpha \\ (\cos\alpha)(\sin\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha & (\cos\alpha)(\cos\alpha)+(\sin\alpha)(\sin\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha+\sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ (इतिसिद्धम्)}$$

हल 6. एक 3×2 आव्यूह, सामान्यत: निम्न प्रकार का होता है—

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3.1| = \frac{|-2|}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3.2| = \frac{|-5|}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|2 - 3.1| = \frac{|-1|}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}|2 - 3.2| = \frac{|-4|}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}\ |3 - 3.1| = \frac{|-0|}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_{32} = \frac{1}{2}\ |3 - 3.2| = \frac{|-3|}{2} = \frac{3}{2}$$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ है।

हल 7. माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -6,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-4) = 4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2$

$$\therefore \text{ adj } A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} = -12 + 12 = 0$$

बायाँ पक्ष $= A\ (\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -12+12 & -6+6 \\ 24-24 & 12-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O = |A|\ I$$

दायाँ पक्ष $= (adj\ A)\ A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -12+12 & -18+18 \\ 8-8 & 12-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O = |A|\ I$$

अतः $A \text{ adj } A = (\text{adj } A) \cdot A = |A|\ I$ (इतिसिद्धम्)

हल 8. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

बायीं सीमा (L.H.L.) का मान निकालने पर

$$\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

दायीं सीमा (R.H.L.) का मान निकालने पर

$$\lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\pi}{2} + h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + h\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin h}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\text{अतः } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\pi}{2} + h\right)$$

अतः $x = \frac{\pi}{2}$ पर फलन संतत है।

हल 9. $x = c$ पूर्णांक पर $f(x) = x - [x]$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^-} (x - [x])$$

$$= \lim_{h \to 0} ((c - h) - [c - h])$$

$$= \lim_{h \to 0} (c - h - (c - 1))$$

$(\because [c - h] = c - 1)$

$$= 1$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} (x - [x])$$

[x को $c + h$ रखने पर]

$$= \lim_{h \to 0} (c + h - [c + h])$$

$$= \lim_{h \to 0} (c + h - c) = 0$$

$$f(c) = c - [c] = c - c = 0$$

इस प्रकार L.H.L. $\neq$ R.H.L. $= f(c)$

अर्थात् $x = c$ पूर्णांक पर f संतत नहीं है। **उत्तर**

हल 10. प्रश्नानुसार $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$x = \sin\theta$ रखने पर

$$y = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$
$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\sin^{-1}x$$

अब x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$ उत्तर

हल 11.
$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$$
$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$
$$f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2)$$

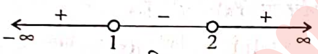
(a) $f(x)$ वर्धमान हो, इसके लिए $f'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad 6(x^2 - 3x + 2) > 0$

$\Rightarrow \quad (x^2 - 3x + 2) > 0$ [चूँकि $6 > 0$]

$\Rightarrow \quad (x-1)(x-2) > 0$

$\Rightarrow \quad x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$



चित्र

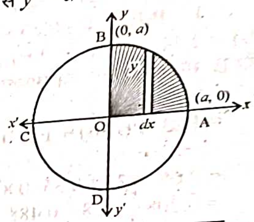
$\therefore$ $f(x)$ अन्तराल $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ में वर्धमान है।

हल 12. माना
$$I = \int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}dx$$
$$= \int\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos^3 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}\right)dx$$
$$= \int\left(\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\tan x \cdot \cos^2 x}\right)dx$$
$$= \int\left(\tan x\sec^2 x + \frac{1}{\tan x}\sec^2 x\right)dx$$
$$= \int\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)\sec^2 x\, dx$$

अब $\tan x = t$ रखने पर $\sec^2 x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int\left(t + \frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^2}{2} + \log|t| + C$$
$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\tan x| + C$$
$$= \log|\tan x| + \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$ उत्तर

हल 13. माना ABCD समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ से निर्धारित वृत्त है।
वृत्त की सममिति (Symmetry) से यह स्पष्ट है कि
अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4 \times$ चतुर्थांश OAB का क्षेत्रफल
$= 4 \times$ [वृत्त, x-अक्ष तथा $x = 0, x = a$ से परिबद्ध क्षेत्रफल]
$$= 4 \times \int_0^a y\, dx$$
वृत्त के समीकरण से $y^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$



इसलिये अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4 \times \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$
$$= 4\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$
$$= 4\left[0 + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}1 - 0 - 0\right] = 2a^2\sin^{-1}1$$
$$= 2a^2 \times \frac{\pi}{2} = \pi a^2$$ वर्ग इकाई उत्तर

हल 14. यहाँ $(\vec{a} + \vec{b}) = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k} + 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$
$= 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ है।

माना $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ है

$\therefore \quad \vec{c}=4\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$

अब $\quad |\vec{c}|=\sqrt{(4)^2+(3)^2+(-2)^2}=\sqrt{16+9+4}$

$=\sqrt{29}$

अत: अभीष्ट मात्रक सदिश

$$\hat{c}=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{4\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i}+\frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j}-\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k} \text{ है।}$$

हल 15. माना कि 'निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने' की घटना को A और 'हड़ताल होने' की घटना को B द्वारा निरूपित किया जाता है। हमें P(A) ज्ञात करना है। हमें ज्ञात है कि

$P(B)=0.65$, P (हड़ताल नहीं) $=P(B')$

$=1-P(B)=1-0.65=0.35$

$P(A|B)=0.32,\ P(A|B')=0.80$

क्योंकि घटनाएँ B और B′ समष्टि समुच्चय के विभाजन हैं इसलिए संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय द्वारा

$=P(B).P(A|B)+P(B')\,P(A|B')$

मान रखने पर

$=0.65\times0.32+0.35\times0.8$

$=0.208+0.28=0.488$

अत: निर्माण कार्य समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता 0.488 है।

खण्ड-स

हल 16. माना कि

$$\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

$3x-1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$

$x=1$ रखने पर $\quad 2=A(-1)(-2) \quad \therefore A=1$

$x=2$ रखने पर $\quad 5=B.1(-1) \quad \therefore B=-5$

$x=3$ रखने पर $\quad 8=C.2.1 \quad \therefore C=4$

$$\therefore \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{4}{x-3}$$

$$\Rightarrow \int\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

$$=\int\frac{1}{x-1}dx-5\int\frac{1}{x-2}dx+4\int\frac{1}{x-3}$$

$=\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$ उत्तर

अथवा का हल

हल— माना कि $\quad I=\int \underset{II}{x}\,\underset{I}{\tan^{-1}x}\,dx=\int(\tan^{-1}x).x\,dx$

(ILATE के अनुसार)

$\tan^{-1}x$ को पहला फलन मानकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$I=(\tan^{-1}x)\int x\,dx-\int\left[\left(\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int x\,dx\right)\right]dx$$

$$=(\tan^{-1}x)\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C \text{ उत्तर}$$

हल 17. हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा की प्रवणता $=\dfrac{dy}{dx}$

बिन्दु (x, y) एवं $(-4,-3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड की प्रवणता

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-y}{-4-x}$$

$$=\frac{y+3}{x+4}$$

प्रश्नानुसार $\quad \dfrac{dy}{dx}=2\left(\dfrac{y+3}{x+4}\right)$

$$\therefore \quad \frac{1}{y+3}dy = \frac{2}{x+4}dx$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{2}{x+4}\,dx + C$$

$$\therefore \quad \log|y+3| = 2\log|x+4| + C \quad \text{....(i)}$$

अब $x = -2, y = 1$ रखने पर

$$\log 4 = 2\log 2 + C$$

$$\log 4 = \log 4 + C \Rightarrow C = 0$$

C का यह मान (i) में रखने पर

$$\log|y+3| = \log|x+4|^2$$

अत: अभीष्ट हल है

$$y+3 = (x+4)^2 \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल— दिया गया अवकल समीकरण

$$(x-y)(dx+dy) = dx - dy$$

$$(x-y)dx + (x-y)dy = dx - dy$$

या $\quad (x-y-1)\,dx + (x-y+1)\,dy = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x-y-1}{x-y+1}$$

अब $x - y = t$ रखने पर

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \quad 1 - \frac{dt}{dx} = -\frac{t-1}{t+1} \quad \text{या} \quad \frac{dt}{dx} = 1 + \frac{t-1}{t+1}$$

या $\quad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{t+1+t-1}{t+1} = \dfrac{2t}{t+1}$

या $\quad \dfrac{t+1}{t}\,dt = 2\,dx$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{t+1}{t}\,dt = 2\int dx$$

$$\int\left(1+\frac{1}{t}\right)dt = 2\int dx$$

या $\quad t + \log|t| = 2x + C \;\therefore\; t = x - y$ रखने पर

या $\quad x - y + \log|x-y| = 2x + C$

या $\quad \log|x-y| = x + y + C$

अब $x = 0$ तथा $y = -1$ रखने पर

$$0 = 0 - 1 + C \;\therefore\; C = 1$$

अत: अभीष्ट हल

$$\log|x-y| = x + y + 1 \text{ उत्तर}$$

हल 18. समीकरण (1) व (2) की $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\,\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\,\vec{b}_2$ से तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\; \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ और } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

इसलिए

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

और

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (-2+5)\hat{i} - (4-3)\hat{j} + (-10+3)\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

इस प्रकार $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$

इसलिए दी गई रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2).(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$

मान रखने पर

$$d = \left|\frac{(3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}).(\hat{i} - \hat{k})}{\sqrt{59}}\right|$$

$$= \left|\frac{3 - 0 + 7}{\sqrt{59}}\right| = \frac{10}{\sqrt{59}} \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल— हम जानते हैं कि यदि दो रेखाएँ लम्बवत् हैं तो

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

अर्थात् यदि AB $\perp$ CD तो $\frac{12}{13} \cdot \frac{4}{13} + \frac{-3}{13} \cdot \frac{12}{13} + \frac{-4}{13} \cdot \frac{3}{13}$ को शून्य के बराबर होना चाहिए।

अर्थात् $\frac{12}{13} \times \frac{4}{13} + \left(\frac{-3}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{-4}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right)$

$$= \frac{48-36-12}{13 \times 13} = 0$$

CD $\perp$ EF क्योंकि

$$\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) + \left(\frac{12}{13} \times \frac{-4}{13}\right) + \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$= \frac{12-48+36}{13 \times 13} = 0$$

अत: CD $\perp$ EF

तथा AB $\perp$ EF क्योंकि

$$\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) + \left(\frac{-3}{13}\right)\left(\frac{-4}{13}\right) + \left(\frac{-4}{13} \times \frac{12}{13}\right)$$

$$= \frac{36+12-48}{13 \times 13} = 0$$

अत: AB $\perp$ EF

अत: AB, CD, EF तीनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं। उत्तर

हल 19. माना कि E_1, E_2 और E_3 क्रमश: डिब्बे I, II और III के चयन को निरूपित करते हैं

तब $\qquad P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

और साथ में यह भी माना कि A घटना 'निकाला गया सिक्का सोने का है' को दर्शाता है।

तब $\qquad P(A|E_1) = P($डिब्बे I से सोने का सिक्का निकलना$)$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$P(A|E_2) = P($डिब्बे II से सोने का एक सिक्का निकलना$) = 0$

[$\because$ सोने का सिक्का डिब्बे में नहीं है।]

$P(A|E_3) = P($डिब्बे III से सोने का सिक्का निकलना$) = \frac{1}{2}$

डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का होने की प्रायिकता

= निकाला गया सोने का सिक्का डिब्बे I से होने की प्रायिकता

$$= P(E_1|A)$$

अब बेज़ प्रमेय द्वारा

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + P(E_3)P(A|E_3)}$$

मान रखने पर $= \dfrac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ **उत्तर**

अथवा का हल

हल— तीनों सिक्कों में से एक सिक्का चुनने की घटना

E_1 = पहला सिक्का चुना गया, E_2 = दूसरा सिक्का चुना गया, E_3 = तीसरा सिक्का चुना गया।

A = सिक्का उछालने पर चित का प्राप्त होना

तीन सिक्कों में से एक सिक्का चुना गया

अर्थात् $P(E_1) = \frac{1}{3}$, $P(E_2) = \frac{1}{3}$, $P(E_3) = \frac{1}{3}$

पहले सिक्के के दोनों ओर चित हैं तब प्रायिकता (सिक्का उछालने पर चित का प्राप्त होना जबकि पहला सिक्का उछाला गया)

$= P(A/E_1) = 1$

दूसरा सिक्का इस प्रकार अनभिनत है कि

$$P(A/E_2) = 75\% = 0.75 = \frac{3}{4}$$

तीसरा सिक्का अनभिनत है $P(A/E_3) = \frac{1}{2}$

P(सिक्के पर चित हो और पहला सिक्का हो) तो

बेज़ प्रमेय से

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)\,P(A/E_1)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2) + P(E_3)\,P(A/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{4}{4+3+2} = \frac{4}{9}$$ **उत्तर**

खण्ड-द

हल 20. माना कि

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x)\, dx$$

यहाँ $\sin x = t$ रखने पर, $\cos x\, dx = dt$

अतः यदि $x = \dfrac{\pi}{2}$ तो $t = 1$, तथा यदि $x = 0$ तो $t = 0$

$$\therefore \quad I = 2\int_0^1 t \tan^{-1} t\, dt$$

ILATE के अनुसार, $\tan^{-1} t$ को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने

$$I = 2\left[\tan^{-1} t \cdot \frac{t^2}{2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \times \frac{t^2}{2}\, dt$$

$$= 2\left[\left\{\frac{1}{2}\tan^{-1}(1) - 0\right\} - 0\right] - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - [t - \tan^{-1} t]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(1 - \tan^{-1} 1 - 0)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल— माना कि

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \left(\frac{1 - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right) dx$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \left(\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\text{cosec}^2\frac{x}{2}\right) dx$$

अब $e^x \cot\dfrac{x}{2} = t$ रखने पर,

$$\left(e^x \cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}e^x \text{cosec}^2\frac{x}{2}\right) dx = dt$$

$$e^x\left(\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\text{cosec}^2\frac{x}{2}\right) dx = dt$$

$$\therefore I = -\int dt = -t = -e^x \cot\frac{x}{2}$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\right) dx = \left[-e^x \cot\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -e^{-\pi}\cot\frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}}\cot\frac{\pi}{4} = e^{\pi}(-0) + e^{\frac{\pi}{2}}.1$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} \text{ उत्तर}$$

हल 21. दी गई रेखाएँ हैं—

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7} = \lambda \text{ (माना)} \quad \text{....(i)}$$

और
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5} = \mu \text{ (माना)} \quad \text{....(ii)}$$

रेखा (i) पर किसी बिन्दु के निर्देशांक

$$P(3\lambda-1,\ 5\lambda-3,\ 7\lambda-5) \quad \text{....(iii)}$$

रेखा (ii) पर किसी बिन्दु के निर्देशांक

$$Q(\mu+2,\ 3\mu+4,\ 5\mu+6) \quad \text{....(iv)}$$

रेखा (i) व (ii) के प्रतिच्छेदन के लिए आवश्यक है कि P व Q एक ही बिन्दु के निर्देशांक हों

$$\therefore \quad 3\lambda - 1 = \mu + 2 \quad \Rightarrow 3\lambda - \mu = 3 \quad \text{....(v)}$$
$$5\lambda - 3 = 3\mu + 4 \quad \Rightarrow 5\lambda - 3\mu = 7 \quad \text{....(vi)}$$
$$7\lambda - 5 = 5\mu + 6 \quad \Rightarrow 7\lambda - 5\mu = 11 \quad \text{....(vii)}$$

समीकरण (v) व (vi) को हल करने पर

$$\lambda = \frac{1}{2},\ \mu = -\frac{3}{2}$$

समीकरण (vii) में λ व μ का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=11$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{22}{2}=11 \Rightarrow 11=11$$

जो कि सत्य है।

अतः समीकरण (i) व (ii) प्रतिच्छेदित करते हैं। अभीष्ट प्रतिच्छेदन बिन्दु

$$P\left(3\times\frac{1}{2}-1,\ 5\times\frac{1}{2}-3,\ 7\times\frac{1}{2}-5\right)\ \left(\lambda=\frac{1}{2} \text{ रखने पर}\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\right) \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल— बिन्दु P(1, 2, 3) से रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}=r$ (माना) पर लम्ब PN डाला गया है।

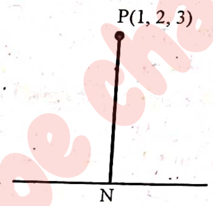
तब N के निर्देशांक $(3r+2, 4r+3, 5r+4)$ लिए जा सकते हैं।

PN के दिक्-अनुपात

$$3r+2-1,\ 4r+3-2,\ 5r+4-3$$

अर्थात् $\qquad 3r+1,\ 4r+1,\ 5r+1$ है।

चूँकि PN रेखा के लम्बवत् है अतः



$$3(3r+1)+4(4r+1)+5(5r+1)=0$$

या $\qquad 9r+3+16r+4+25r+5=0$

$$50r+12=0$$

या $\qquad r=\frac{-12}{50}=\frac{-6}{25}$

अतः N के निर्देशांक

$$\left(3\left(\frac{-6}{25}\right)+2,\ 4\left(\frac{-6}{25}\right)+3,\ 5\left(\frac{-6}{25}\right)+4\right)$$

या $\qquad N\left(\frac{32}{25}, \frac{51}{25}, \frac{70}{25}\right)$ उत्तर

तथा PN की लम्बाई

$$=\sqrt{\left(1-\frac{32}{25}\right)^2+\left(2-\frac{51}{25}\right)^2+\left(3-\frac{70}{25}\right)^2}$$

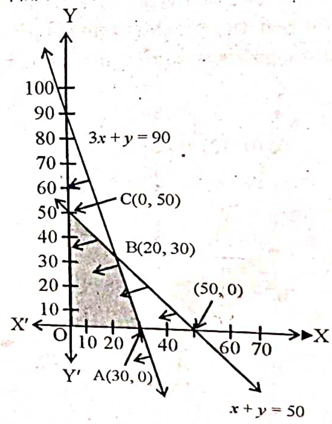
$$=\sqrt{\frac{49}{625}+\frac{1}{625}+\frac{25}{625}}$$

$$=\sqrt{\frac{75}{625}}=\sqrt{\frac{3}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{5} \text{ उत्तर}$$

हल 22. प्रश्नानुसार $z=4x+y$, अवरोध है :

$$x+y\le 50,\ 3x+y\le 90,\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

चित्र में छायांकित क्षेत्र (1) से (3) के व्यवरोधों के निकाय के द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र है। हम अवलोकन करते हैं कि सुसंगत क्षेत्र OABC परिबद्ध है। इसलिए हम Z का अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करेंगे।



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान
(0, 0)	$Z = 4x + y = 4 \times 0 + 0 = 0$
(30, 0)	$Z = 4x + y = 4 \times 30 + 0 = \mathbf{120}$ ← अधिकतम
(20, 30)	$Z = 4x + y = 4 \times 20 + 30 = 110$
(0, 50)	$Z = 4x + y = 4 \times 0 + 50 = 50$

कोनीय बिंदुओं O, A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), (30, 0), (20, 3
और (0, 50) हैं।

अब प्रत्येक कोनीय बिंदु पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

अतः बिंदु (30, 0) पर Z का अधिकतम मान 120 है।

अथवा का हल

हल—दिये गये व्यवरोध निम्नलिखित हैं—

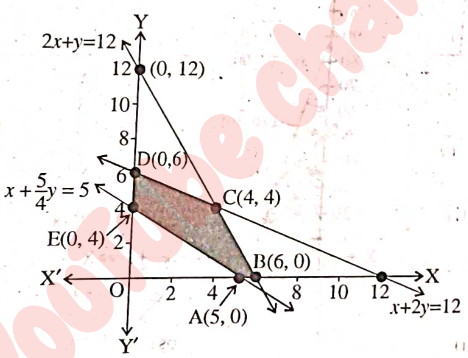
$$x + 2y \le 12 \quad ....(1)$$

$$2x + y \le 12 \quad ....(2)$$

$$x + \frac{5}{4}y \ge 5 \quad ....(3)$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0 \quad ....(4)$$

हम व्यवरोधों (1) से (4) का आलेखन करते हैं। आकृति में दिखाया गया सुसंगत क्षेत्र ABCDE (छायांकित) है जिसको व्यवरोधों (1) से (4) तक द्वारा निर्धारित किया गया है। अवलोकन करने पर हमें प्राप्त होता है कि सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है।



कोनीय बिन्दुओं A, B, C, D और E के निर्देशांक क्रमशः (5, 0), (6, 0), (4, 4), (0, 6) और (0, 4) हैं।

इन कोनीय बिन्दुओं (शीर्षों) पर $Z = 60x + 40y$ का मान निम्नलिखित सारणी में दिया गया है—

कोनीय बिन्दु	$Z = 60x + 40y$ का मान
(5, 0)	300
(6, 0)	360
(4, 4)	400 ← अधिकतम
(0, 6)	240
(0, 4)	160

हम देखते हैं कि बिन्दु (4, 4) Z का अधिकतम मान है।

मॉडल पेपर-4

खण्ड-अ

हल 1.

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
(स)	(द)	(स)	(ब)	(अ)	(अ)
(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)
(ब)	(अ)	(स)	(ब)	(अ)	(स)
(xiii)	(xiv)	(xv)			
(द)	(द)	(अ)			

हल 2. (i) $\frac{3\pi}{4}$ (ii) $-\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{5\pi}{6}$ (iv) $\frac{\cos x - 2}{3}$

(v) −2 (vi) x^2 (vii) $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$

हल 3. (i) दिया है कि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow 3 - x^2 = 3 - 8$

$$\Rightarrow x^2 = 8$$

अतः $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ उत्तर

(ii) $\begin{vmatrix} \cos 50° & \sin 10° \\ \sin 50° & \cos 10° \end{vmatrix} = \cos 50° \cos 10° - \sin 10° \sin 50°$

$= \cos(50°+10°) = \cos 60°$

$= \frac{1}{2}$ उत्तर

(iii) $f(x) = x^2+2x+5$

$\Rightarrow f'(x) = 2x+2$

यह फलन वर्धमान होगा यदि $f'(x)>0$ $\Rightarrow 2x+2>0$

$\Rightarrow x>-1$

$\Rightarrow x\in(-1,\infty)$ उत्तर

(iv) सीमान्त लागत $MC = \frac{dC}{dx}$

$= \frac{d}{dx}\{0.005x^3-0.02x^2+30x+5000\}$

$= 0.005(3x^2)-0.02(2x)+30$

जब $x=3$ है तब

$= 0.015(3)^2-0.04(3)+30$

$= 0.135-0.12+30 = 30.015$ उत्तर

(v) माना $I = \int x\sqrt{1+2x^2}dx$

यहाँ $1+2x^2 = t$ रखने पर $4x\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{4}\int\sqrt{t}dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}+C$

$= \frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ उत्तर

(vi) माना कि $I = \int \underset{II}{x}\underset{I}{\log 2x}dx$ (ILATE के अनुसार)

$\log 2x$ को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$I = \log 2x\int x dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\log 2x)\int x dx\right]dx$

$= (\log 2x)\times\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{x^2}{4}+C$ उत्तर

(vii) $y = x\sin x$ का अवकलन करने पर

$y' = 1.\sin x + x.\cos x$

$y' = \sin x + x\cos x$ ...(i)

$\because$ समीकरण

$y = x\sin x$

अतः $\sin x = \frac{y}{x}$ एवं $\cos x = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$

$\sin x$ व $\cos x$ का मान (i) में रखने पर

$y' = \frac{y}{x}+x\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x} = \frac{y+x\sqrt{x^2-y^2}}{x}$

x से गुणा करने पर

$xy' = y+x\sqrt{x^2-y^2}$ यही दिया गया अवकल समीकरण है।

(viii) प्रश्नानुसार $(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{x}+\vec{a}) = 12$

या $\vec{x}.\vec{x}+\vec{x}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{x}-\vec{a}.\vec{a} = 12$

या $|\vec{x}|^2-|\vec{a}|^2 = 12$

$[\because \vec{x}.\vec{a}=\vec{a}.\vec{x}, \vec{x}.\vec{x}=|\vec{x}|^2, \vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2]$

या $|\vec{x}|^2-1 = 12$

$[\because |\vec{a}|=1$ दिया है मात्रक सदिश से$]$

$|\vec{x}|^2 = 13$

$|\vec{x}|^2 = \sqrt{13}$ उत्तर

(ix) दिया है कि सदिश $\vec{a}, \hat{i}$ के साथ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ और $\hat{k}$ के साथ θ कोण बनाता है।

$\therefore$ $\vec{a}$ के दिक् cosine $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{4}$ और $\cos\theta$ हैं।

हम जानते हैं कि $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$

$\therefore \cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\theta = 1$

या $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cos^2\theta = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad (\theta \text{ न्यूनकोण है})$$

$$\therefore \qquad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{उत्तर}$$

(x) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b})$

$= \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}$

$= 0+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-0$

($\because$ समान सदिश का वज्रगुणन शून्य होता है)

$= 2(\vec{a}\times\vec{b})$ उत्तर

खण्ड-ब

हल 4. $A = \{(x \in Z : 0 \le x \le 12\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 12\}$

$R = \{(a, b) : |a - b|$ 4 का गुणज है$\}$

R स्वतुल्य है क्योंकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $a - a = 0$, जो कि 4 का गुणज है। अत: $(a, a) \in R \; \forall a \in A$ R सममित है।

$|a - b| = |b - a| = 4k$ अत: $(a, b) \in R$

$\Rightarrow (b, a) \in R \; \forall a, b \in A$

R संक्रामक है यदि $(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|$, 4 का गुणज है

$\Rightarrow a - b = \pm 4 k_1$ ....(1)

$(b, c) \in R \Rightarrow |b - c|$, 4 का गुणज है

$\Rightarrow b - c = \pm 4 k_2$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$\Rightarrow a - b + b - c = \pm 4 (k_1 + k_2)$

$\Rightarrow a - c = \pm 4 (k_1 + k_2)$

$\Rightarrow |a - c|$, 4 का गुणज है।

हल 5. $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+4 & 2-1 & 3+5 \\ 5-1 & 7-2 & 9-0 \\ -2-1 & 1-3 & 1-1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

बायाँ पक्ष $= (A - B)' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ .... (1)

दायाँ पक्ष $= A' - B' = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+4 & 5-1 & -2-1 \\ 2-1 & 7-2 & 1-3 \\ 3+5 & 9-0 & 1-1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ = बायाँ पक्ष (इतिसिद्धम्)

हल 6. $a_{ij} = \dfrac{(i+j)^2}{2}$

a_{ij} में $i = 1, j = 1$ रखने पर

$$a_{11} = \frac{(1+1)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

a_{ij} में $i = 1, j = 2$ रखने पर

$$a_{12} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

a_{ij} में $i = 2, j = 1$ रखने पर

$$a_{21} = \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

a_{ij} में $i = 2, j = 2$ रखने पर

$$a_{22} = \frac{(2+2)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ उत्तर

हल 7. दिया है $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 2$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-3) = 3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -5$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -1$

$\therefore \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 15 = 13 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ का अस्तित्व होगा।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ उत्तर}$$

हल 8. $x = 0$ पर फलन का मान होगा

$f(x) = 0$

$\boxed{\therefore f(0) = 0}$

बायीं सीमा (L.H.L.) का मान निकालने पर

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 - h) = \lim_{h \to 0} (0 - h) \cos\frac{1}{(0-h)}$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[-h\cos\left(\frac{1}{h}\right)\right]$$

$= 0 \times [-1, 1$ के मध्य कोई परिमित मान$]$

$= 0$

दायीं सीमा (R.H.L.) का मान निकालने पर

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 + h)$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[(0+h)\cos\frac{1}{(0+h)}\right]$$

$= 0 \times [-1, 1$ के मध्य कोई परिमित मान$]$

$= 0$

अतः $f(0) = f(0 - 0) = f(0 + 0)$, अतः $x = 0$ पर फलन संतत है।

हल 9. प्रश्नानुसार $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{यदि } x \le 0 \\ 4x + 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$

(i) $x = 0$ पर $\quad f(x) = \lambda(x^2 - 2x)$ जब $x \le 0$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \lambda(x^2 - 2x)$$

$= 0$ तथा $f(0) = 0$

$f(x) = 4x + 1$ जब $x > 0$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (4x + 1) = 1$$

L.H.L. $\neq$ R.H.L.

$\therefore x = 0$ पर λ किसी भी मान के लिए f संतत नहीं है।

हल 10. प्रश्नानुसार $\quad y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2 - 1}\right)$

$x = \cos\theta$ रखने पर

$$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta - 1}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$= \sec^{-1}(\sec 2\theta) = 2\theta = 2\cos^{-1} x$

अब x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{उत्तर}$$

हल 11. दिया गया है $\quad f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$

इसलिए $\quad f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$

$f'(x) = 12(x^2 - x - 6)$

$f(x)$ वर्धमान हो, इसके लिए $f'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad 12(x^2 - x - 6) > 0 \quad [\because 12 > 0]$

$\Rightarrow \quad (x^2 - x - 6) > 0$

$\Rightarrow \quad (x - 3)(x + 2) > 0$

स्थिति I $x - 3 > 0$ एवं $x + 2 > 0 \Rightarrow x > 3, x > -2$

स्थिति II $(x - 3) < 0$ एवं $(x + 2) < 0 \Rightarrow x < 3, x < -2$

अतः $3 < x < -2 \Rightarrow (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

पर वर्धमान है।

हल 12. माना $\quad I = \int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x \, dx$

$$= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

अब $\quad \tan x = t$ रखने पर $\sec^2 x \, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int t^2\,dx - (\tan x - x)$$

$$= \frac{t^3}{3} - \tan x + x + C$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C \text{ उत्तर}$$

हल 13. $y = 2\sqrt{1-x^2}$ को सरल करने पर

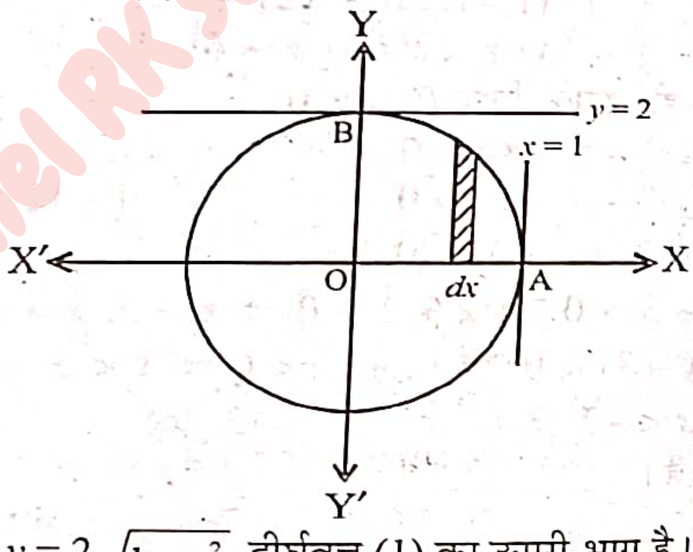
$y^2 = 4(1 - x^2)$ दोनों तरफ का वर्ग करने पर

$y^2 = 4 - 4x^2$

या $y^2 + 4x^2 = 4$

या $\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{4x^2}{4} = 1$ या $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2(2)} = 1$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2(2)} = 1 \quad \ldots(1)$$



स्पष्टतः वक्र $y = 2\sqrt{1-x^2}$ दीर्घवृत्त (1) का ऊपरी भाग है। अतः हमें आकृ
के अनुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 × क्षेत्रफल OABO

$$= 2\int_0^1 y\,dx$$

$$= 2\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1$$

$$= 4\left[\left(0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-(0+0)\right] = 4\times\frac{\pi}{4}$$

$= \pi$ वर्ग इकाई

हल 14. हम पाते हैं कि

$$\overline{AB} = (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

इसलिए $|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$

$\overline{BC} = (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k}$

$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

इसलिए $|\overline{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

और $\overline{CA} = (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k}$

$\overline{CA} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

इसलिए $|\overline{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

इसके अतिरिक्त ध्यान दीजिए कि

$$|\overline{AB}|^2 = 41 = 6 + 35 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{CA}|^2$$

अतः दिया हुआ त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है।

हल 15. सम संख्या 2, 4, 6 एक पासे में 3 तरीकों से आ सकती है।

एक पासे के उछालने पर प्रतिदर्श परिणाम

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore$ सम आने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ एक सम संख्या आने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2}$$

तीनों पासों पर सम संख्या आने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

तीनों पासों को उछालने पर कम से कम एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ उत्तर}$$

खण्ड-स

हल 16. माना कि

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$x = 1$ रखने पर $\quad 1 = A(-1)(-2) \quad \therefore A = \frac{1}{2}$

$x = 2$ रखने पर $\quad 2 = B.1(-1) \quad \therefore B = -2$

$x = 3$ रखने पर $\quad 3 = C.2.1 \quad \therefore C = \frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{(x-2)} + \frac{3}{2(x-3)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} dx - 2\int \frac{1}{x-2} dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}$$

$$= \frac{1}{2} \log|x-1| - 2\log|x-2| + \frac{3}{2}\log|x-3| + C \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल—माना कि $I = \int (\sin^{-1} x)^2\, dx$

यहाँ $\sin^{-1} x = \theta$ रखने पर $\therefore x = \sin\theta,\ dx = \cos\theta\, d\theta$

$$\therefore \quad = \int \underset{I}{\theta^2} \underset{II}{\cos\theta}\, d\theta \quad \text{(ILATE के अनुसार)}$$

θ^2 को प्रथम फलन मानकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$I = \theta^2 \sin\theta - \int \underset{I}{2\theta} \underset{II}{\sin\theta}\, d\theta$$

पुन: खण्डश: समाकलन करने पर

$$I = \theta^2 \sin\theta - 2[\theta(-\cos\theta) - \int 1.(-\cos\theta)\, d\theta]$$

$$= \theta^2 \sin\theta + 2\theta\cos\theta - 2\int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \theta^2 \sin\theta + 2\theta\cos\theta - 2\sin\theta + C$$

$$= \theta^2 \sin\theta + 2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} - 2\sin\theta + C$$

$\sin\theta = x$ या $\theta = \sin^{-1} x$ रखने पर

$$I = x(\sin^{-1} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\ (\sin^{-1} x) - 2x + C$$

$$= (\sin^{-1} x)^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\ \sin^{-1} x - 2x + C \text{ उत्तर}$$

हल 17. प्रश्नानुसार किसी बिन्दु पर निर्देशांक का योग = प्रवणता + 5

$$x + y = \frac{dy}{dx} + 5$$

या $$\frac{dy}{dx} = x + y - 5$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (x + y - 5)$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y - 5$$

या $$\frac{dy}{dx} - y = x - 5$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

यहाँ $\quad P = -1$ तथा $Q = x - 5$

$$\therefore \quad \int P\, dx = \int (-1)\, dx = -x$$

$$\therefore \quad I.F. = e^{\int P\, dx} = e^{-x}$$

अत: अवकल समीकरण का हल

$$y \times I.F. = \int Q \times I.F.\, dx + C$$

या $$y e^{-x} = \int \underset{I}{(x-5)} \underset{II}{e^{-x}}\, dx + C$$

खण्डश: समाकलन करने पर

$$y\,e^{-x} = (x-5)\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int 1.\frac{e^{-x}}{-1}\,dx$$

$$= -(x-5)\,e^{-x} + \frac{e^{-x}}{-1} + C$$

$$= -(x-5)\,e^{-x} - e^{-x} + C$$

या $\quad y = -(x-5) - 1 + C\,e^{x}$

अब $x = 0, y = 2$ रखने पर $\quad 2 = 5 - 1 + C = 4 + C$

$\therefore C = -2$

$\therefore$ अभीष्ट हल $\quad y = -x + 5 - 1 - 2\,e^{x}$

या $\quad y = 4 - x - 2\,e^{x}$

जो कि वक्र का अभीष्ट समीकरण है। उत्तर

अथवा का हल

हल—माना किसी समय t पर गुब्बारे की त्रिज्या r तथा आयतन v है।

प्रश्नानुसार

$$\frac{dv}{dt} = k$$

परन्तु $\quad v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = k \text{ या } \frac{4}{3}\pi\,.\,3r^2\,\frac{dr}{dt} = k$$

$$4\pi r^2\,\frac{dr}{dt} = k \text{ या } 4\pi r^2\,dr = k\,dt$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int 4\pi r^2\,dr = \int k\,dt$$

या $\quad 4\pi\frac{r^3}{3} = k\,t + C \quad$ ....(i)

जब $t = 0, r = 3$ तो

$$\frac{4}{3}\pi\,.\,27 = k\,.\,0 + C$$

$\therefore \quad C = 36\pi$

C का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = kt + 36\pi \quad \text{....(ii)}$$

जब $t = 3, r = 6$

$$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = k\,.\,3 + 36\pi$$

$$288\pi = 3k + 36\pi$$

या $\quad 3k = (288 - 36)\pi = 252\pi$

$\therefore \quad k = \frac{252\pi}{3} = 84\pi$

समीकरण (ii) में k का मान रखने पर

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 84\pi\,t + 36\pi$$

या $\quad \pi r^3 = 63\pi\,t + 27\pi$

अभीष्ट समीकरण $\quad r^3 = 63t + 27$

या $\quad r = (63t + 27)^{1/3}$ उत्तर

हल 18. रेखाएँ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ से प्रश्नानुसार दी गई रेखाओं से तुलना करने पर

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{b}_1 = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k},\ \vec{b}_2 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

हम जानते हैं कि रेखा $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ के बीच न्यूनतम दूरी

$$d = \left|\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\,.\,(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \quad \text{....(1)}$$

यहाँ $\quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

तथा $\quad \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-6)\hat{i} - (1-4)\hat{j} + (3+6)\hat{k}$$

$$= -9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$$

अतः $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{(-9)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{81 + 9 + 81}$

$$= \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$$

इनका मान समी. (1) में रखने पर

$$d = \left|\frac{(3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}).(-9\hat{i}+3\hat{j}+9\hat{k})}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$= \left|\frac{3.(-9)+3\times3+3\times9}{3\sqrt{19}}\right| = \left|\frac{-27+9+27}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$= \frac{9}{3\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}}$$ उत्तर

अथवा का हल

हल—वह रेखा जो बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरती है और उसके दिक्-अनुपात a, b, c हों, तो उसका समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

यहाँ पर रेखा (– 2, 4, – 5) से गुजरती है तथा $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5}$ $= \frac{z+8}{6}$ के समान्तर है।

अतएव रेखा के दिक्-अनुपात = 3, 5, 6

अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$\frac{x-(-2)}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-(-5)}{6}$$

या $$\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$$ उत्तर

वह रेखा जो बिन्दु (x, y, z) से जाती है उस बिन्दु का स्थिति सदिश $x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ है तथा यदि रेखा के दिक् अनुपात a, b, c है तो रेखा का सदिश समीकरण —

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} = (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) + \lambda(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})$$

अभीष्ट सदिश समीकरण

$$\vec{r} = (-2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k})$$ उत्तर

हल 19. चुने गये व्यक्ति के वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की घटना को हमने E (माना) और व्यक्ति A के एच.आई.वी. परीक्षण में पोजीटिव

घटना को दर्शाता है। हमें यहाँ पर P(E|A) ज्ञात करना है। और E' चुने गये व्यक्ति के एच.आई.वी. की पोजीटिव न होने की घटना को दर्शाता है। तब दिया गया है

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 - P(E) = 0.999$$

P(A|E) = P (व्यक्ति का परीक्षण एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जबकि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव है) $= 90\% = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 0.9$

और P(A|E') = P (व्यक्ति का परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जब कि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव नहीं है)

$$= 1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

अब बेज़ प्रमेय द्वारा

$$P(E|A) = \frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E) + P(E')P(A|E')}$$

$$= \frac{0.001\times0.9}{0.001\times0.9 + 0.999\times0.01} = \frac{90}{1089}$$

$$= 0.083 \text{ (लगभग)}$$

अभीष्ट प्रायिकता = 0.083 उत्तर

अथवा का हल

हल—थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं।

तथा थैले II में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं।

माना कि घटना E_1 थैले I से लाल गेंद निकाली गई तथा घटना E_2 थैले I से काली गेंद निकाली गई।

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{3}{7}, P(E_2) = \frac{4}{7}$$

घटना A : लाल रंग की गेंद निकालना

एक लाल गेंद थैले I से निकालकर II में रख दी गई। इस प्रकार थैले II में अब 5 लाल और 5 काली गेंदें हो गईं।

$$\therefore \quad P(A/E_1) = \frac{5}{10}$$

एक काली गेंद थैले I से निकाल कर II में रख दी। इस प्रकार दूसरे थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदें हैं।

अतः $\quad P(A/E_2) = \frac{4}{10}$

$\therefore$ बेज़ प्रमेय से

$$P(E_2/A) = \frac{P(E_2)\,P(A/E_2)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}}{\frac{3}{7}\times\frac{5}{10}+\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}} = \frac{16}{15+16}$$

(अंश व हर को 70 से गुणा करने पर)

$$= \frac{16}{31} \text{ उत्तर}$$

खण्ड-द

हल 20. माना कि

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4 - 4\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{4-3\cos^2 x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-3\cos^2 x}{4-3\cos^2 x}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4-3\cos^2 x-4}{4-3\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{3(4-3\cos^2 x)}\right)dx$$

(अंश में हर से भाग करने पर)

$$= -\frac{1}{3}[x]_0^{\pi/2} + \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-3\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{4\sec^2 x-3}\,dx$$

[$\cos^2 x$ से अंश व हर को भाग करने पर]

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{4\sec^2 x-3}\,dx$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{1+4\tan^2 x}\,dx$$

पुनः $\tan x = t$ रखने पर, $\sec^2 x\,dx = dt$, जब $x = \frac{\pi}{2}$ तो $t = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$

जब $x = 0$ तो $t = 0$

$$I = -\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+4t^2}\,dt$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}[\tan^{-1} 2t]_0^{\infty}$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

हल— माना कि

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-[1-\sin 2x]}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-[\sin x-\cos x]^2}}\,dx$$

अब $\sin x - \cos x = t$ रखने पर, $\therefore (\cos x + \sin x)\,dx = dt$

यदि $x = \frac{\pi}{3}$ तो $t = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

तथा यदि $x = \frac{\pi}{6}$ तो $t = \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\therefore \quad I = \int_{-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\sin^{-1} t\right]_{-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) - \sin^{-1}\left[-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right]$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$= 2\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$$ उत्तर

हल 21. दी गई रेखाओं के सदिश समीकरण हैं—

$$\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1} \quad \text{...(1)}$$

$$\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2} \quad \text{...(2)}$$

जहाँ $\vec{a}_1 = 4\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k}, \quad \vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{a}_2 = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, \quad \vec{b}_2 = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

यहाँ $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) - (4\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k}) = -3\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-10+12) - \hat{j}(-5+6) + \hat{k}(4-4)$$

$$= 2\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k}$$

और $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{5}$

अभीष्ट न्यूनतम दूरी $= \left|\dfrac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$

$$= \left|\frac{(-3\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k})\cdot(2\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k})}{\sqrt{5}}\right|$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}}$$ इकाई उत्तर

अथवा का हल

हल— दिए गए बिन्दु हैं : A(0, −1, −1), B(4, 5, 1), C(3, 9, 4) और D(−4, 4, 4)

तब रेखा AB के दिक्‌अनुपात : 4 − 0, 5 + 1, 1 + 1 = 4, 6, 2

अर्थात् 2, 3, 1

तब रेखा CD के दिक्‌अनुपात : −4 −3, 4 − 9, 4 − 4 = −7, −5, 0

अर्थात् 7, 5, 0

अब रेखा AB का समीकरण ...(1)

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{1} = \alpha \text{ माना} \quad \text{...(2)}$$

तब रेखा (1) पर सामान्य बिन्दु $(2\alpha, 3\alpha - 1, \alpha - 1)$

रेखा CD का समीकरण ...(3)

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y-9}{5} = \frac{z-4}{0} = \beta \text{ माना}$$

तब रेखा (2) पर सामान्य बिन्दु = ...(4)

$(7\beta + 3, 5\beta + 9, 4)$

(2) व (3) में दिए गए निर्देशांकों को बराबर करने पर

$(2\alpha, 3\alpha - 1, \alpha - 1) = (7\beta + 3, 5\beta + 9, 4)$

अर्थात् $2\alpha = 7\beta + 3; \quad 3\alpha - 1 = 5\beta + 9$ तथा $\alpha - 1 = 4$

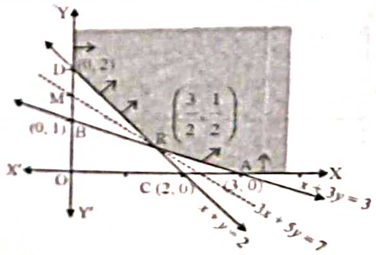
उपरोक्त को हल करने पर,

$$\alpha = 5, \beta - 1$$

अत: दी गई रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करती हैं।

$\alpha = 5$, AB के सामान्य बिन्दु तथा $\beta = 1$, CD के सामान्य बिन्दु में रखने पर दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेदी बिन्दु (10, 14, 4) प्राप्त होता है।

हल 22. प्रश्नानुसार $Z = 3x + 5y$ अवरोध $x + 3y \geq 3$, $x + y \geq 2$, $x, y \geq 0$



सभी असमिकाओं को ग्राफ पेपर पर आलेखित करने पर इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र YDRAX है जबकि R बिन्दु AB, $x+3y=3$ और CD $x+y=2$ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।

AB और CD के समीकरणों को हल करने से बिन्दु R के निर्देशांक $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ होते हैं।

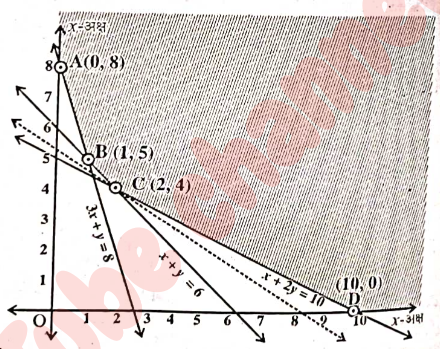
अर्थात् कोनीय बिन्दु हैं A(3, 0), R $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, D(0, 2)। अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = 3x + 5y$
A(3, 0)	$Z = 3 \times 3 + 5 \times 0 = 9$
R$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$Z = 3 \times \frac{3}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 7 \leftarrow$ न्यूनतम
D(0, 2)	$Z = 3 \times 0 + 5 \times 2 = 10$

अत: कोनीय बिन्दु R$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ पर Z का न्यूनतम मान = 7 उत्तर

अथवा का हल

हल—



यहाँ पर $\quad Z = 3x + 5y$ ....(i)

और निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत

$x + 2y \geq 10$ ....(ii)

$x + y \geq 6$ ....(iii)

$3x + y \geq 8$ ....(iv)

$x \geq 0$ ....(v)

$y \geq 0$ ....(vi)

सभी असमिकाओं को ग्राफ पेपर पर आलेखित करने पर इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र ABCD है जिसके निर्देशांक निम्न प्रकार से हैं A (0, 8), B(1, 5), C (2, 4) तथा D (10, 0) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे।

कोनीय बिन्दु	Z के संगतमान $Z = 3x + 5y$
A(0, 8)	40
B (1, 5)	28
C (2, 4)	**26** $\leftarrow$ न्यूनतम
D(10, 0)	30

अत: कोनीय बिन्दु C (2, 4) पर Z का न्यूनतम मान = 26 प्राप्त हुआ। उत्तर

मॉडल पेपर-5

खण्ड-अ

हल 1.

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
(द)	(स)	(ब)	(द)	(अ)	(ब)
(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)	(xii)
(ब)	(द)	(स)	(अ)	(स)	(द)
(xiii)	(xiv)	(xv)			
(स)	(अ)	(स)			

हल 2. (i) $-\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$ (iii) $-\frac{\pi}{10}$ (iv) $\frac{2}{\cos y - 3}$

(v) 3 (vi) e^{-x} (vii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

हल 3. (i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 4 \times (-5)$

$= -2 + 20 = 18$ उत्तर

(ii) $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow 12x + 14 = 32 - 42$

$\Rightarrow 12x = -24$

$\Rightarrow x = -2$ उत्तर

(iii) $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

$f'(x) = -6 - 4x = -2(2x + 3)$

फलन वर्धमान होगा यदि $f'(x) > 0 \Rightarrow -2(2x+3) > 0$

$\Rightarrow 2x + 3 < 0$

$\Rightarrow x < \frac{-3}{2}$

अभीष्ट अन्तराल $= \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ उत्तर

(iv) यहाँ $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2$

$\therefore$ $f'(x) = 4 - x$

अब $f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

इस प्रकार, $f(-2) = 4(-2) - \frac{1}{2}(-2)^2 = -8 - 2 = -10$

$f(4) = 4(4) - \frac{1}{2}(4)^2 = 16 - 8 = 8$

और $f\left(\frac{9}{2}\right) = 4\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 18 - \frac{81}{8} = \frac{63}{8}$

अत: निरपेक्ष उच्चतम मान 8 है जो $x = 4$ पर है।

(v) माना $I = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} dt$

$= \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

यहाँ $e^x + e^{-x} = t$ रखने पर, $\therefore (e^x - e^{-x})dx = dt$

$\therefore$ $I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|(e^x + e^{-x})| + C$ उत्तर

(vi) माना कि $I = \int \underset{II}{x^2} \underset{I}{\log x}\, dx = \int \underset{I}{(\log x)} . \underset{II}{x^2}\, dx$

(ILATE के अनुसार)

$\log x$ को पहला फलन मानकर खण्डश: समाकलन करने पर

$I = (\log x)\int x^2 dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\log x)\int x^2 dx\right]dx$

$= (\log x).\frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx$

$I = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C$ उत्तर

(vii) $xy = \log y + C$ का अवकलन करने पर

$1.y + xy' = \frac{1}{y} \times y'$

y से गुणा करने पर

$y^2 + xyy' = y'$

या $y^2 = y' - xyy' = y'(1 - xy)$

$\therefore$ $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$

(viii) क्योंकि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है,

इसलिए $|\vec{a}| = 1$

दिया गया है $(\vec{x} - \vec{a}).(\vec{x} + \vec{a}) = 8$

अथवा $\vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{x} - \vec{a}.\vec{a} = 8$

अथवा $|\vec{x}|^2 + \vec{x}.\vec{a} - \vec{x}.\vec{a} - |\vec{a}|^2 = 8$ $[\because \vec{x}.\vec{a} = \vec{a}.\vec{x}]$

मान रखने पर $|\vec{x}|^2 - 1 = 8$ अर्थात् $|\vec{x}|^2 = 9$

इसलिए $|\vec{x}| = 3$ (क्योंकि सदिश का परिमाण सदैव शून्येत्तर होता है।)

(ix) प्रश्नानुसार $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 6 & 27 \\ 1 & \lambda & \mu \end{vmatrix} = \vec{0}$

या $(6\mu - 27\lambda)\hat{i} - (2\mu - 27)\hat{j} + (2\lambda - 6)\hat{k} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $6\mu - 27\lambda = 0,$

$2\mu - 27 = 0,\ 2\lambda - 6 = 0$

$\lambda = 3,\ \mu = \frac{27}{2}$ उत्तर

(x) $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$

∴ $|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$

∴ $|\vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

⇒ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ आपस में समान नहीं हैं चूँकि इनके संगत घटक समान न हैं अर्थात् इनके संगत घटक भिन्न हैं।

खण्ड-ब

हल 4. $(x, x) \in R$, क्योंकि x तथा x में पेजों की संख्या समान है।
∴ R स्वतुल्य है।
$(x, y) \in R \Rightarrow x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है।
⇒ y तथा x में पेजों की संख्या समान है।
⇒ $(y, x) \in R$ ∴ R सममित है।
$(x, y) \in R$, $(y, z) \in R \Rightarrow x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है और y तथा z में पेजों की संख्या समान है।
⇒ x तथा z में पेजों की संख्या समान है।
⇒ $(x, z) \in R$ ∴ R संक्रामक है।
यहाँ पर दिया गया सम्बन्ध स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।
अतः R एक तुल्यता सम्बन्ध है। उत्तर

हल 5. $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + 2B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2 & 1+0 \\ 3+2 & 2+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+2B)' = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$ उत्तर

हल 6. $a_{ij} = \dfrac{(i+2j)^2}{2}$

a_{ij} में $i = 1, j = 1$ रखने पर

$$a_{11} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

a_{ij} में $i = 1, j = 2$ रखने पर

$$a_{12} = \frac{(1+4)^2}{2} = \frac{25}{2}$$

a_{ij} में $i = 2, j = 1$ रखने पर

$$a_{21} = \frac{(2+2)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

a_{ij} में $i = 2, j = 2$ रखने पर

$$a_{22} = \frac{(2+4)^2}{2} = 18$$

∴ 2 × 2 क्रम का आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$$ उत्तर

हल 7. माना $\Delta = \begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$

R_1 पंक्ति से विस्तार करने पर

$$\Delta = x\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - \sin\theta\begin{vmatrix} -\sin\theta & 1 \\ \cos\theta & x \end{vmatrix} + \cos\theta\begin{vmatrix} -\sin\theta & -x \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(-x^2 - 1) - \sin\theta(-x\sin\theta - \cos\theta) + \cos\theta(-\sin\theta + x\cos\theta)$$

$$= -x(x^2+1) + x\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta + x\cos^2\theta$$

$$= -x(x^2+1) + x(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= -x(x^2+1) + x = -x^3$$

जो कि θ से स्वतन्त्र है। **(इतिसिद्धम्)**

हल 8. $x = 1$ पर

$f(x) = x + 5$ जब $x < 1$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+5)$$

$= 6$

$f(x) = x - 5$ जब $x > 1$

$\therefore$ R.H.L. $= \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 5)$

$= -4$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$\therefore$ $x = 1$ पर f संतत नहीं है।

$x = c < 1$ पर, $f(x) = x + 5$ [जब $x < 1$]

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x + 5) = c + 5$

$= f(c)$

$\therefore$ $x = c < 1$ पर f संतत है।

$x = c > 1$ पर, $f(x) = x - 5$ जब $x > 1$

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x - 5) = c - 5 = f(c)$

$\therefore$ $x = c > 1$ पर f संतत है।

अतः $x \in R - \{1\}$ के सभी बिन्दुओं पर f संतत है लेकिन $x = 1$ पर संतत नहीं है। **उत्तर**

हल 9. प्रश्नानुसार फलन $f(x) = 2x^2 - 1$

यह फलन $x = 3$ पर परिभाषित है।

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x^2 - 1) = (2 \times 3^2 - 1)$

$= 2 \times 9 - 1 = 18 - 1 = 17$

अब $f(3) = 17$

$\because \lim_{x \to 3} f(x) = 17 = f(3)$

$\therefore$ $x = 3$ पर f संतत है। **उत्तर**

हल 10. प्रश्नानुसार $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$

यहाँ $x = \tan\theta$ रखने पर

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 3\theta)$$

$= 3\theta = 3\tan^{-1} x$

अब x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1 + x^2}$ **उत्तर**

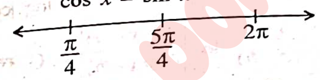
हल 11. दिया है $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$

इसलिए $f'(x) = \cos x - \sin x$

अब $f'(x) = 0$ से

$\cos x - \sin x = 0$

$\cos x = \sin x$



$\tan x = 1$ इसलिए $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ प्राप्त होते हैं, क्योंकि $0 \le x \le 2\pi$

बिन्दु $x = \frac{\pi}{4}$ और $x = \frac{5\pi}{4}$ अन्तराल $[0, 2\pi]$ को तीन असंयुक्त अन्तरालों क्रमशः $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ में विभक्त करते हैं।

$f'(x) > 0$ यदि $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

अतः अन्तरालों $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ में फलन f वर्धमान है।

और $f'(x) < 0$, यदि $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

अतः f अन्तराल $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।

हल 12. माना $I = \int \frac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx = \frac{1}{\sin(a-b)}$

$$\int \frac{\sin(a-b)}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x-b)-(x-a)]}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}$$

$$\int \frac{\sin(x-b)\cos(x-a) - \cos(x-b)\sin(x-a)}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$$

[$\because$ $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$]

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int [\tan(x-b) - \tan(x-a)]\, dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} [-\log|\cos(x-b)| + \log|\cos(x-a)|] + C$$

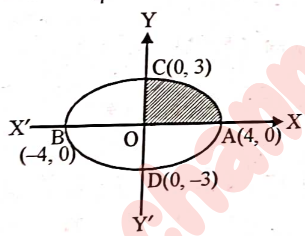
$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right| + C$$ उत्तर

हल 13. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\therefore$ $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} = \frac{16-x^2}{16}$

या $\frac{y}{3} = \sqrt{\frac{16-x^2}{16}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$

$\therefore$ $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$



दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ का क्षेत्रफल = 4 × OAC का क्षेत्रफल

[$\because$ दीर्घवृत्त दोनों अक्षों के प्रति सममित है।]

$$= 4\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\, dx$$

$$= 3\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$$

$$\left[\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$= 3\left[\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$$

$$= 3\left[\left(0 + 8\sin^{-1}\frac{4}{4}\right) - 0\right] = 24\sin^{-1} 1$$

$$= 24 \times \frac{\pi}{2} = 12\pi$$ वर्ग इकाई उत्तर

हल 14. प्रश्नानुसार $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

तथा $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ $\vec{a} + \vec{b} = (2-1)\hat{i} + (-1+1)\hat{j} + (2-1)\hat{k}$

$= \hat{i} + 0.\hat{j} + \hat{k} = \hat{i} + \hat{k}$

तथा $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

अतः $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$= \frac{1}{|\vec{a}+\vec{b}|}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$$ उत्तर

हल 15. प्रश्नानुसार

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{7}{12}$$

$\Rightarrow$ P(A- नहीं और B- नहीं)

$= P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$

$\because$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{7}{12} + P(A \cap B)$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12}$$

$$= \frac{3-6+7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

और

$$P(A) \, . \, P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{24}$$

$$\neq P(A \cap B) = \left(\frac{1}{3}\right)$$

$\therefore$ A और B स्वतंत्र नहीं हैं। उत्तर

खण्ड-स

हल 16. माना कि

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\therefore \quad x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x = A(x^2+1) + B(x^2-x) + C(x-1)$$

$x = 1$ रखने पर $\quad 1 = A \, . \, 2 \quad \therefore A = \frac{1}{2}$

x^2 व x के गुणांक की तुलना करने पर

$$0 = A + B \quad \therefore B = -A = -\frac{1}{2}$$

तथा $\quad 1 = -B + C \therefore C = 1 + B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

अत:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

या $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C \quad \text{उत्तर}$$

अथवा का हल

माना कि

$$I = \int x \cos^{-1} x \, dx = \int \underset{\mathrm{I}}{(\cos^{-1} x)} \, . \, \underset{\mathrm{II}}{x} \, dx$$

(ILATE के अनुसार)

$\cos^{-1} x$ को पहला फलन मानकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$I = (\cos^{-1} x) \int x\,dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) \int x\,dx\right] dx$$

$$= \cos^{-1} x \, . \, \frac{x^2}{2} - \int \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \frac{x^2}{2} dx + C$$

अब $x = \cos\theta$ रखने पर $\therefore -\sin\theta \, d\theta = dx$

$$\therefore \quad I = \frac{x^2}{2}\cos^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}[-\sin\theta]\,d\theta$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \times \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos^{-1} x - \frac{1}{4}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos^{-1} x - \frac{\theta}{4} - \frac{1}{8} \, . \, 2\sin\theta\cos\theta + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos^{-1} x - \frac{\cos^{-1} x}{4} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} \, . \, x + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos^{-1} x - \frac{1}{4}\cos^{-1} x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$$

$$= \frac{(2x^2-1)}{4}\cos^{-1} x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$$

$$\therefore \quad I = (2x^2-1)\frac{\cos^{-1}x}{4} - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C \text{ उत्तर}$$

हल 17. दिया है

$$xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$$

$x(y+2)$ से भाग देने पर

$$\frac{y}{y+2}\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)}{x} \text{ या } \frac{y}{y+2}dy = \frac{x+2}{x}dx$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{y}{y+2}dy = \int \frac{x+2}{x}dx$$

या $$\int \frac{y+2-2}{y+2}dy = \int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$$

या $$\int\left(1-\frac{2}{y+2}\right)dy = \int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$$

$\therefore \quad y - 2\log|(y+2)| = x + 2\log|x| + C$ ....(i)

यह वक्र $(1-1)$ से गुजरता है अतः

$-1-2\log 1 = 1 + 2\log 1 + C \quad \therefore C = -$

(i) में C का मान रखने पर

$$y - 2\log|(y+2)| = x + 2\log|x| - 2$$
$$y = 2\log|(y+2) + x + 2\log|x| - 2$$
$$= 2(\log|(y+2)| + \log|x|) + x - 2$$

दिए हुए अवकल समीकरण का हल

$$y = x + 2\log x(y+2) - 2$$

या $y - x + 2 = \log[x^2(y+2)^2]$ उत्तर

अथवा का हल

दिया गया अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2\cot x (x \neq 0) \text{ है,}$$

जो कि $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ $P = \cot x$ और $Q = 2x + x^2\cot x$ है

इसलिए $\quad I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$

अतः अवकल समीकरण का हल है।

$$(y).(I.F) = \int (Q).(I.F)dy + C$$
$$y\sin x = \int(2x + x^2\cot x)\cdot\sin x\, dx + C$$

अथवा $\quad y\sin x = \int 2x\sin x\, dx + \int x^2\cos x\, dx + C$

अथવા $\quad y\sin x = \sin x\cdot\left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int\cos x\cdot\left(\frac{2x^2}{2}\right)dx + \int x^2\cos x\, dx + C$

$$y\sin x = x^2\sin x - \int x^2\cos x\, dx + \int x^2\cos x\, dx + C$$

अथवा $\quad y\sin x = x^2\sin x + C$ ....(1)

समीकरण (1) में $y = 0$ एवं $x = \frac{\pi}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

अथवा $\quad C = -\frac{\pi^2}{4}$

समीकरण (1) में C का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$y\sin x = x^2\sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

अथवा $\quad y = x^2 - \frac{\pi^2}{4\sin x} (\sin x \neq 0)$

यह दिये हुये अवकल समीकरण का विशिष्ट हल है।

हल 18. दिए गए समीकरण $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ की $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ से तुलना करने पर

$$\vec{a}_1 = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

तथा $$\vec{b}_1 = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

इसी प्रकार $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ की

$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ से तुलना करने पर

$$\vec{a}_2 = -4\hat{i} - \hat{k} \text{ तथा } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

हम जानते हैं कि रेखा $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ के बीच दूरी

$$= \left| \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| \quad \text{....(1)}$$

अत: $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (4+4)\hat{i} - (-2-6)\hat{j} + (-2+6)\hat{k}$$

$$= 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$$

अत: $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2}$

$$= \sqrt{64 + 64 + 16}$$

$$= \sqrt{144} = 12$$

तथा $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (-4\hat{i} - \hat{k}) - (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= -10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = (-10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$= -10 \times 8 + (-2) \times 8 + (-3) \times 4$$

$$= -80 - 16 - 12 = -108$$

इन सबका मान समी. (1) में रखने पर दी हुई रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी

$$= \left| \frac{-108}{12} \right| = 9 \text{ उत्तर}$$

अथवा का हल

पहली रेखा $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$ के दिक्अनुपात = -1, 8, 4 तथा

रेखा $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ के दिक्अनुपात = 2, 5, -3

हम जानते हैं कि वे दो रेखाएँ जिनके दिक्अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 हैं के बीच का कोण θ हो तो

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$$

यहाँ $a_1 = -1, b_1 = 8, c_1 = 4$

तथा $a_2 = 2, b_2 = 5, c_2 = -3$

$$\therefore \quad \cos\theta = \left| \frac{(-1)(2) + (8)(5) + (4)(-3)}{\sqrt{(-1)^2 + (8)^2 + (4)^2}\sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-3)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-2 + 40 - 12}{\sqrt{1 + 64 + 16}\sqrt{4 + 25 + 9}} \right| = \left| \frac{26}{\sqrt{81}\sqrt{38}} \right|$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{26}{9\sqrt{38}}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right) \text{ उत्तर}$$

हल 19. माना कि घटना E_1 = ध्यान व योग से लाभ की घटना

E_2 = दवा द्वारा इलाज की घटना

E = दिल का दौरा पड़ने की घटना

$$P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{2}, P(E) = 40\% = 0.4$$

ध्यान व योग से दिल का दौरा पड़ने का खतरा 30% कम हो जाता है।

अर्थात् दिल का दौरा 70% खतरा है।

या E/E_1 = ध्यान व योग से दिल का दौरा पड़ता है।

$$\therefore \quad P(E/E_1) = 0.40 \times 0.7 = 0.28$$

दवा द्वारा दिल का दौरा पड़ने का 25% खतरा कम हो जाता है।

अर्थात् दवा द्वारा दिल का दौरा पड़ने से खतरा 75% है।

$$\therefore \quad P(E/E_2) = 0.4 \times 0.75 = 0.30$$

इस प्रकार $P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{2}$

$$P(E/E_1) = 0.28, P(E/E_2) = 0.30$$

अत: बेज़ प्रमेय से $P(E_1/E)$

$$= \frac{P(E_1)\,P(E/E_1)}{P(E_1)\,P(E/E_1) + P(E_2)\,P(E/E_2)}$$